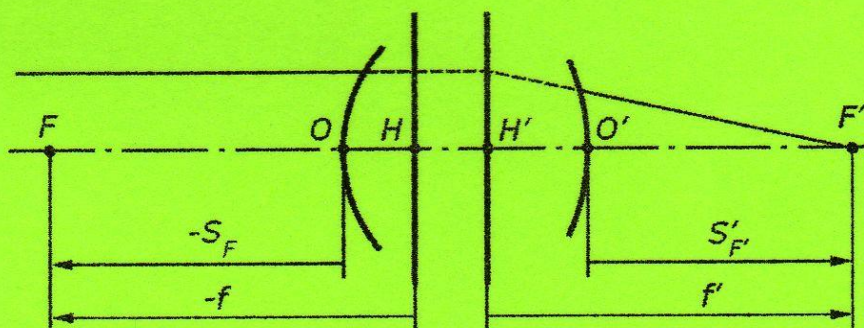
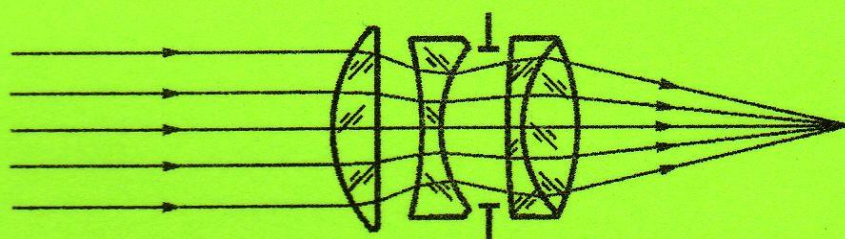


И.В.Федосов

# Геометрическая оптика





И.В.Федосов

# Геометрическая оптика

Саратов 2008

УДК 535.31 (075.8)  
ББК 22.34я73  
ф33

И. В. Федосов. Геометрическая оптика. – Саратов: Сателлит, 2008. – 92 с.

Учебное пособие по геометрической оптике для студентов высших учебных заведений. Рассмотрены основы геометрической оптики и теории идеальных оптических систем.

**ISBN 978-5-901459-94-2**

УДК 535.31 (075.8)  
ББК 22.34я73  
ф33

**ISBN 978-5-901459-94-2**

© Иван Владленович Федосов, 2008

## **Предисловие**

Это учебное пособие посвящено основам геометрической оптики. Оно обобщает опыт преподавания автором данного раздела оптики в рамках курсов «Введение в прикладную оптику», «Техническая оптика и расчет оптических систем», «Фотография и цифровая обработка изображений», «Современные оптические системы» в Саратовском государственном университете.

Объем материала и порядок его изложения выбраны таким образом, чтобы подчеркнуть ключевые идеи геометрической оптики и современной теории оптических систем. Вводная часть пособия содержит краткое изложение основных этапов становления оптической науки. В первой главе рассматриваются базовые законы и понятия геометрической оптики. Во второй – общие свойства идеальных оптических систем, дающих изображение. В третьей – преломление и отражение лучей плоскими и сферическими поверхностями. Четвертая глава посвящена параксиальному приближению в геометрической оптике.

Иллюстрации автора.

## Введение

Свет, с помощью которого мы видим, составляет только небольшую часть широкого спектра явлений одной природы, называемых **электромагнитными волнами**. Причем разные части спектра характеризуются разными значениями определенной физической величины. Эту величину называют «длиной волны». По мере того, как она пробегает значения в пределах спектра видимого света, цвет световых лучей меняется от красного до фиолетового. Систематическое изучение спектра от длинных волн к коротким лучше всего начать с так называемых **радиоволн**. В технике радиоволны получают в широком диапазоне длин волн и даже более длинные, чем те, которые используются в обычном радиовещании. В радиовещании применяются волны длиной около 500 м, за ними идут так называемые короткие волны, далее радиолокационный диапазон и т.д. На самом деле между разными диапазонами нет никаких границ, природа их не создала. Числа, которые соответствуют разным диапазонам, и, конечно, сами названия диапазонов весьма условны. Далее, пройдя долгий путь через **миллиметровый диапазон**, мы придем к **инфракрасным** волнам, а оттуда к спектру **видимого света**, который заключен между значениями длин волн от  $7 \times 10^{-7}$  до  $4 \times 10^{-7}$  м. Спустившись за его границы, мы попадем в **ультрафиолетовую** область. За ультрафиолетовой областью начинаются **рентгеновские лучи**, но границу между ними точно определить мы не можем, она где-то около  $10^{-8}$  м. Это область мягких рентгеновских лучей, за нею идет обычное рентгеновское излучение, затем жесткое излучение, потом **гамма-излучение** и так далее, к все меньшим значениям величины, которую мы называли длиной волны.

Используя различные приемники, сейчас мы можем регистрировать волны практически во всем спектре от радио волн до гамма-излучения. Но так было не всегда. Инфракрасные волны открыты Уильямом Гершелем в 1800 году, ультрафиолетовые – в 1801 Уильямом Волластоном и Иоганном Риттером, радиоволны обнаружил Генрих Герц в 1888, рентгеновское излучение – Вильгельм Рёнтген в 1895, а природу гамма излучения установил Эрнест Резерфорд в 1903. И только видимый глазом свет знаком каждому и известен с незапамятных времен. Зрение служит человеку важнейшим источником информации об окружающем мире. Оно позволяет ориентироваться в пространстве, читать книги и даже наблюдать планеты и далекие звезды.

Вопрос о том, что такое свет и каким образом мы видим окружающие предметы, интересует человечество с давних пор. До нашего времени сохранились трактаты Евклида, написанные в 300 г. до н.э. Они посвящены механизму зрения и закономерностям отражения световых лучей от зеркальных поверхностей. Согласно Евклиду, световые лучи представляют собой прямые линии, а видимый размер предмета зависит от расстояния до него. В этих трактатах впервые сформулирован закон отражения света, который применим как к плоским, так и к сферическим зеркалам. Евклид отмечает, что вогнутые зеркала могут дать как сходящийся, так и расходящийся пучок, а выпуклые – только расходящийся.

Название одного из этих сочинений, написанных почти две с половиной тысячи лет назад – «Оптика», стало названием науки о природе света его свойствах. Слово «оптика» происходит от греческого *οπτική*, что означает взгляд, облик или вид.

Современникам Евклида было хорошо известно, что свет изменяет свое направление, пересекая границу прозрачных сред. Но точное соотношение между углами, которые образуют с поверхностью падающий и преломленный лучи, им так и не удалось установить. В отличие от закона отражения, закон преломления был установлен почти две тысячи лет спустя, в 1621 году. Тем не менее, преломление света сферическими поверхностями человечество использует с незапамятных времен.

Древнейший способ огранки драгоценных камней, который используется и в наше время, – придание камню округлой формы, известной

под названием «кабошон». Кабошон, изготовленный из прозрачного камня, представляет собой плоско выпуклую линзу. Самые древние из известных линз такого рода были изготовлены из горного хрусталя 4600 лет назад в Египте, между 2620 и 2400 гг. до н.э. Они применялись для имитации глаз у статуй. Но все-таки кабошоны из драгоценных камней чаще всего служили украшениями. Хотя, будучи изготовленными из горного хрусталя или берилла, они могли употребляться для зажигания огня при помощи солнечных лучей.

Упоминание об этом встречается в комедии «Облака» античного драматурга Аристофана, написанной в 425 г. до н.э.:

**Стрепсиад**

Нашел хитрейший способ уничтожить иск!  
Меня ты сам похвалишь!

**Сократ**

Что ж придумал ты?

**Стрепсиад**

У врачей такой видал ты камешек,  
Красивый и прозрачный? Добывают им  
Огонь они.

**Сократ**

Ты говоришь о стеклышке?

**Стрепсиад**

Ну да! Что, если я добуду стеклышко  
И, подождав, пока напишет иск писец,  
В сторонке стану, солнечный поймаю луч  
И сразу растоплю истца ходатайство?

(перевод А.Пиотровского).

В Древнем Риме считалось, что камни, обработанные в форме полого кабошона, представляющего собой вогнутую линзу, помогают людям, страдающим близорукостью. Известно, например, что император Нерон, (37-68 гг. н. э.), наблюдал бои гладиаторов через кристалл изумруда. Существует также предположение, что античные граверы и ювелиры использовали прозрачные камни, отшлифованные в виде плоско-выпуклых линз, в качестве увеличительных стекол, однако прямых свидетельств на этот счет не сохранилось. Широкое распространение линз в древнем мире было невозможно потому, что крупные прозрачные кристаллы, пригодные для их изготовления, встречаются в природе не часто. Линзы оставались редкими и дорогостоящими предметами до тех пор, пока не была освоена технология получения прозрачного и однородного стекла.

Основной составляющей частью стекла является двуокись кремния ( $\text{SiO}_2$ ) – кремнезем. Первое стекло создала сама природа. Около 450 млрд. лет назад расплавленная порода из недр Земли устремилась на поверхность и вулканами пробила земную кору. Из горячей лавы, содержащей двуокись кремния, при затвердении образовывалось стекло. Вулканическое стекло называется обсидианом. Человек делает стекло, расплавляя кварцевый песок, с древних времен. Египтяне более чем 5000 лет назад знали способ изготовления цветного стекла, которым они покрывали посуду, иногда делали бусы. Стекланные флаконы для духов и мазей использовались в Египте более 3000 лет назад. В эпоху Римской империи (I век до н.э. – V век н.э.) человек освоил, как выдувать стекло и каким образом придавать стеклянным предметам нужную форму и размер. Но стекло, производившееся в то время, было очень неоднородным, мутным, и имело зеленоватый оттенок.

Однородное и прозрачное стекло значительной толщины появилось только во второй половине XIII века. Способ его изготовления был изобретен на стекольных заводах в Венеции, производивших зеркала, оконное и художественное стекло. Тогда же, по-видимому, были изобретены и очки, так как, начиная с 1300 года, «зрительные линзы» часто упоминаются в уставах гильдии венецианских стекольщиков.

Массовое производство стеклянных линз началось во второй половине XV века, после изобретения книгопечатания, породившего вслед



за широким распространением книг, повышенный спрос на очки. В каждом крупном городе Европы появились оптические мастерские, а технология шлифовки линз значительно усовершенствовалась, были сконструированы первые станки для изготовления линз. В употребление вошли специальные приспособления для шлифовки линз: бронзовые, железные, медные и латунные формы – «грибы» и «чашки» различных радиусов кривизны.

Технология шлифовки линз почти не изменилась с тех пор. Она заключается в притирании к стеклянной заготовке металлической формы – «чашки» для изготовления выпуклых линз или «гриба» - для вогнутых. Между заготовкой и формой вводят абразивный порошок с водой. Форму вручную или с помощью станка циклически перемещают вдоль радиусов заготовки и поворачивают вокруг своей оси, добиваясь полного контакта поверхностей. В результате поверхности и формы, и заготовки становятся сферическими. Это происходит потому, что только сферическая поверхность допускает возможность трех независимых перемещений по сфере того же радиуса при сохранении взаимного соприкосновения во всех точках этих сфер. Размер зерен абразивного порошка постепенно уменьшают, доводя поверхность до оптического качества. Таким способом, даже вручную, можно получить поверхность линзы, отклонения которой от идеальной сферы не превышают десятых долей микрометра! (Человеческий волос имеет толщину примерно 50 микрометров.) Именно поэтому большинство линз, используемых человеком с античных времен и до наших дней, имеют сферические поверхности.

Стремление шлифуемых поверхностей к сферической форме имеет и отрицательную сторону. Из-за него сделать точную плоскую пластинку оказывается труднее, чем сферическую линзу. А изготовление так называемых **асферических** поверхностей, имеющих форму, например, параболоида или гиперболоида вращения, даже в наше время представляет собой сложную технологическую задачу.

В конце XVI века, вероятно, в результате экспериментов с линзами, были созданы более сложные оптические приборы – микроскоп и зрительная труба. Микроскоп был изобретен голландцем Захарием Янсеном в 1590 г. Заявку на выдачу привилегии на зрительную трубу почти одновременно подали шлифовальщики очков Ганс Липперсгей и Яков

Мециус. Зрительная труба, позволяющая рассматривать удаленные предметы, была крайне необходима военным и мореплавателям. Поэтому, несмотря на все старания сохранить это изобретение в тайне, весть о нем стремительно распространилось по всей Европе.

Галилео Галилей, был первым, кто сконструировал зрительную трубу большого увеличения и направил ее на небо. Им было обнаружено множество новых звезд, невидимых невооруженным глазом, было доказано, что Млечный путь состоит из большого скопления мельчайших звезд. Он увидел горы и впадины на Луне и, наконец, обнаружил четыре спутника, обращающихся вокруг Юпитера.

В то же самое время Антони ван Левенгук, совершенствуя микроскоп, обнаружил в капле воды из городского канала сотни и тысячи мельчайших живых созданий. Левенгук стал первым человеком, увидевшим невидимый невооруженным глазом мир микроорганизмов. В числе прочего Левенгук первым открыл эритроциты, описал бактерии, дрожжи, простейшие, волокна хрусталика глаза, зарисовал строение глаз насекомых и мышечных волокон.

С появлением оптических инструментов, вооружающих глаз человека и открывающих взору невидимое ранее, оптика приобретает практическое значение как наука об оптических приборах. В начале XVII в., выходит в свет множество трактатов по оптике. И обнаруживается отсутствие точного закона преломления света. Этот закон пытался установить опытным путем Клавдий Птолемей около 140 г. н.э. Он составил таблицу зависимости угла преломления от угла падения. Но найти в ней закономерность так и не смог, заключив, что углы, скорее всего, просто пропорциональны друг другу. Закон преломления в этом виде существовал полторы тысячи лет.

В 1611 г., исследуя ход лучей в системах линз, Иоганн Кеплер пользуется Птолемеевым законом и находит, что он неточен. Математически точная формулировка закона преломления обнаруживается только в 1626 г. в бумагах умершего незадолго до этого голландского математика Виллеброрда Снеллиуса.

Открытием закона преломления света завершается становление оптической теории, основы которой были заложены еще Евклидом. Она называется **геометрической оптикой** потому, что базируется на из-

вестных теоремах классической геометрии и нескольких экспериментально установленных физических законах распространения света.

Представления о природе света и его свойствах с тех пор значительно изменились. Сейчас уже известно, что законы геометрической оптики –

- закон прямолинейного распространения света,
- закон независимости световых пучков,
- закон отражения света от зеркальной поверхности,
- закон преломления света на границе двух прозрачных сред,
- закон обратимости распространения световых лучей,

носят приближенный характер и не учитывают многие важные свойства световых волн. Но, даже являясь достаточно грубым приближением, геометрическая оптика до сих пор имеет огромное практическое значение. Она позволяет простыми математическими средствами объяснить образование изображений в оптических системах и разработать методы расчета новых оптических систем. На положениях геометрической оптики основана современная теория оптических приборов. Однако отдельные ее вопросы, особенно касающиеся структуры оптического изображения, могут быть правильно поняты и разрешены только с учетом волновой природы света.

# **1. Основы геометрической оптики**

## **1.1. Законы геометрической оптики**

Самые первые представления об оптических явлениях базировались на следующих экспериментально установленных законах:

- 1. Закон прямолинейного распространения света;**
- 2. Закон независимости световых пучков;**
- 3. Закон отражения света;**
- 4. Закон преломления света на границе двух прозрачных сред;**
- 5. Закон обратимости хода лучей;**

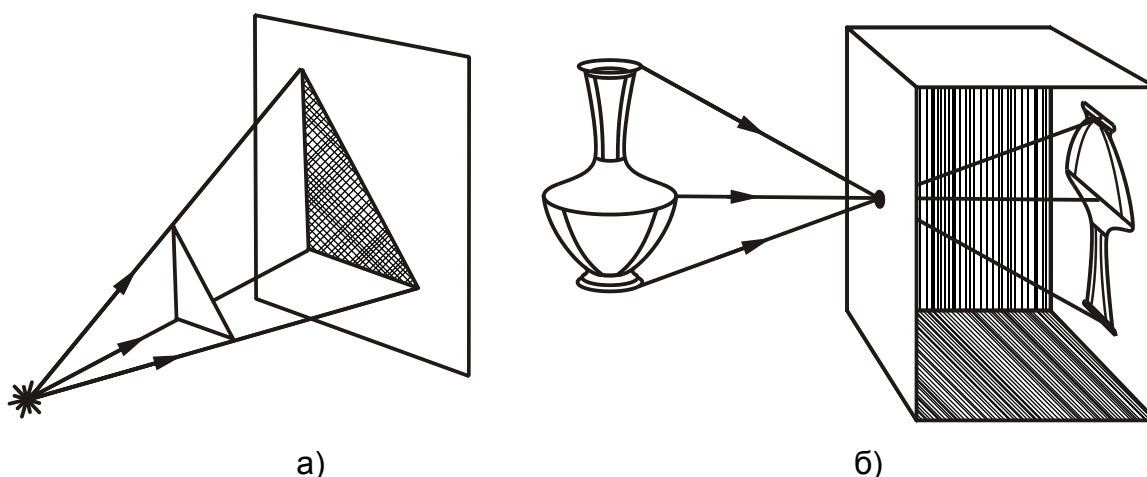
Дальнейшее изучение этих законов показало, во-первых, что они имеют гораздо более глубокий смысл, чем может казаться с первого взгляда, и, во-вторых, что их применение ограничено, и они являются лишь приближенными законами. Установление условий и границ применимости оптических законов означало важный прогресс в исследовании света.

Сущность этих законов сводится к следующему.

### **1. ЗАКОН ПРЯМОЛИНЕЙНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА**

***В однородной среде свет распространяется по прямым линиям.***

Закон этот встречается в сочинении по оптике, приписываемом Евклиду (300 г. до н. э.) и, вероятно, был известнее и применялся гораздо раньше.



**Рис.1.1.** Прямолинейное распространение света. а – образование тени при освещении точечным источником; б – получение изображения с помощью малого отверстия.

Опытным доказательством этого закона могут служить наблюдения над резкими тенями, даваемыми точечными источниками света, или получение изображений при помощи малых отверстий. Соотношение между контуром предмета и его тенью при освещении **точечным источником**, (т.е. источником, размеры которого очень малы по сравнению с расстоянием до предмета), соответствует геометрической проекции при помощи прямых линий (рис. 1.1 (а)). Аналогично рис. 1.1(б) иллюстрирует получение изображения при помощи малого отверстия, причем форма и размер изображения показывают, что проектирование происходит при помощи прямолинейных лучей. Комната, или большой ящик с маленьким отверстием в стенке, т.н. **камера обскура** (от латинского *camera obscura* – *темная комната*), является древнейшим оптическим прибором для получения изображений, известным еще во времена Евклида.

Закон прямолинейного распространения света может считаться надежно установленным на опыте. Он имеет весьма глубокий смысл, ибо само понятие о прямой линии, по-видимому, возникло из оптических наблюдений. Геометрическое понятие о прямой как линии, представляющей кратчайшее расстояние между двумя точками, есть понятие о линии, по которой распространяется свет в однородной среде. Отсюда берет начало практикуемый с незапамятных времен контроль прямолинейности лекала или изделия по лучу зрения. Более детальное исследование описываемых явлений показывает, что закон прямолинейного распространения света теряет силу, если мы переходим



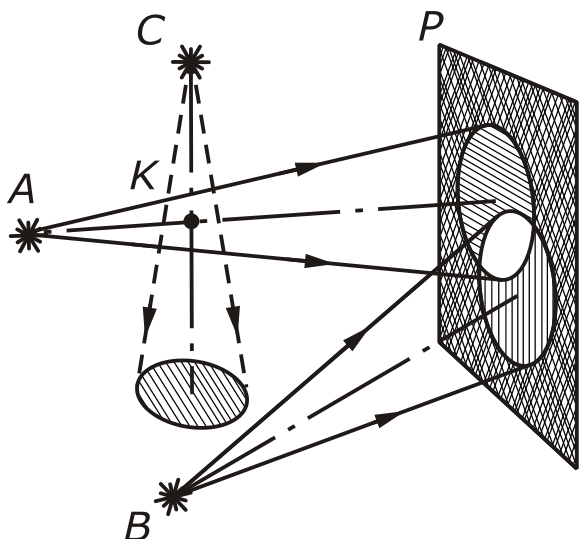
к очень малым отверстиям. В камере обскура, показанной на рис.1.1(а), хорошее изображение получится при размере отверстия около 0,5 мм, то есть когда диаметр отверстия равен примерно 1000 длин волн видимого света. При уменьшении этого отверстия в 10 раз изображение станет расплывчатым и нерезким. Изображение совсем не получится и экран будет освещен практически равномерно, если диаметр отверстия уменьшить до 0,5 – 1 мкм, то есть до размера, близкого к длине волны видимого света. Отступления от закона прямолинейного распространения света обусловлены волновой природой света и рассматриваются в учении о **дифракции** (от латинского *diffractus* – *разломанный, переломанный*).

## **2. ЗАКОН НЕЗАВИСИМОСТИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ**

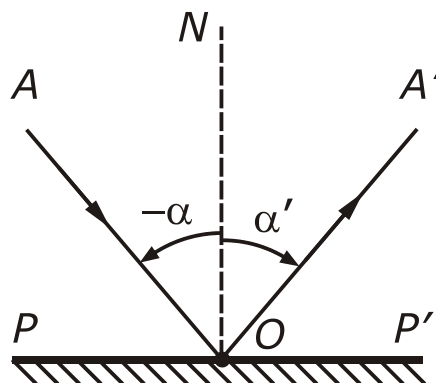
***Световые лучи распространяются независимо друг от друга – так, как будто других лучей, кроме рассматриваемого, не существует.***

Световой поток можно разбить на отдельные световые пучки, выделяя их, например, при помощи диафрагм. Действие этих выделенных световых пучков оказывается независимым, т.е. эффект, производимый отдельным пучком, не зависит от того, действуют ли одновременно другие пучки или они устранены.

Опытным доказательством этого закона служит отсутствие влияния друг на друга световых пучков проходящих через одну и ту же точку пространства в разных направлениях, как, например, пучки от источников А и С, проходящие через точку К на рис. 1.2. Независимость световых пучков, проходящих через одну точку пространства, наблюдается лишь при не слишком больших **интенсивностях** света. (**Интенсивностью света называют количество энергии, переносимое световой волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения света**). При интенсивностях света, получаемых с помощью лазеров, закон независимости перестает выполняться. Причиной этому служат **нелинейные** эффекты, когда интенсивное световое излучение изменяет оптические свойства среды, через которую распространяется.



**Рис.1.2.** Независимость световых пучков.



**Рис.1.3.** Отражение света от зеркальной поверхности.

Другим подтверждением закона независимости световых пучков может служить сложение световых пучков от нескольких источников света. На рис. 1.2 показан направленный на экран пучок света от источника *A*.

На тот же самый экран направлен пучок света от другого источника *B*. Интенсивность света на экране будет равна сумме интенсивностей каждого из пучков.

Сложение интенсивностей имеет место, когда *A* и *B* – два различных и независимых источника света. Отклонение от закона независимости обнаруживается, если разность фаз между колебаниями световых волн в каждом из пучков, достигающих экрана, постоянна. Такие пучки называют **когерентными** (от латинского *cohaerentia* – *сцепление, связь*). В области перекрытия когерентных пучков происходит перераспределение световой энергии. В результате интенсивность света на одних участках экрана может быть значительно больше, а на других – значительно меньше суммарной интенсивности. Это явление получило название **интерференции** (от латинских слов *inter* – *между* и *ferens* –

*переносящий, несущий*). Интерференция, также как и дифракция, объясняется волновой природой света.

### 3. ЗАКОН ОТРАЖЕНИЯ СВЕТА

Встречая на пути зеркальные поверхности или границы раздела двух прозрачных сред, световые лучи полностью или частично отражаются. При этом ход лучей подчиняется закону отражения, согласно которому, **падающий луч, нормаль к отражающей поверхности в точке падения луча и отраженный луч лежат в одной плоскости, и углы падающего и отраженного лучей с нормалью равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку** (рис.1.3). Угол между падающим лучом АО и нормалью NO называется *углом падения*  $\alpha$ ; угол между отраженным лучом ОА' и нормалью NO называется **углом отражения**  $\alpha'$ . Закон отражения выражается формулой:

$$\alpha = -\alpha' \quad (1.1)$$

Углы падения и отражения отсчитываются от нормали к поверхности, причем угол, образованный поворотом луча от нормали по ходу часовой стрелки, считают положительным, при обратном повороте – отрицательным. На рис. 1.3 по принятому правилу знаков (см. параграф 1.4.) угол  $\alpha$  отрицательный, а угол  $\alpha'$  – положительный.

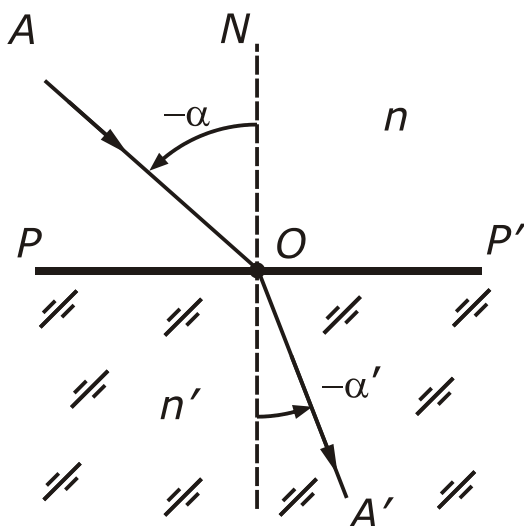
Закон отражения также упоминается в сочинениях Евклида. Установление его связано с употреблением полированных металлических поверхностей (зеркал), известных уже в очень отдаленную эпоху.

### 4. ЗАКОН ПРЕЛОМЛЕНИЯ СВЕТА

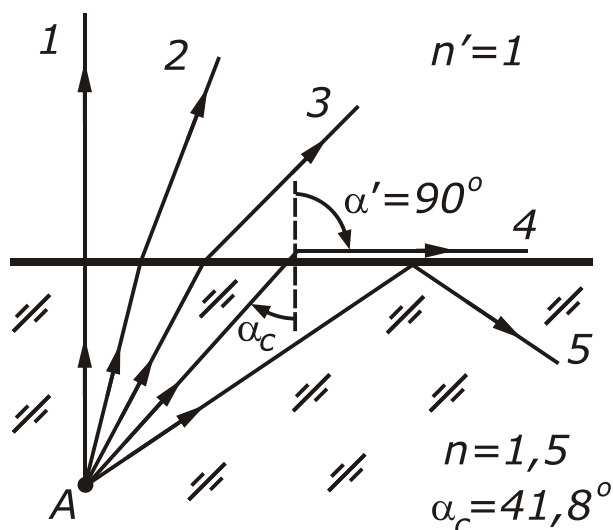
Луч света, падая на границу между двумя прозрачными средами, не только частично отражается на ней, но и переходит из одной среды в другую. Пересекая границу двух прозрачных сред, луч света изменяет свое направление. Это явление называется **преломлением света**.

Ход световых лучей при преломлении подчиняется следующему закону: **падающий луч, нормаль к поверхности раздела сред в точке падения и преломленный луч лежат в одной плоскости, произведение показателя преломления на синус угла, образованного лучом с нормалью, остается постоянным при переходе луча из одной среды в другую**. Математически закон преломления выражается в виде:

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad (1.2)$$



**Рис.1.4.** Преломление света на границе двух прозрачных сред



**Рис.1.5.** Явление полного внутреннего отражения света

**Показателем преломления** среды называют отношение скорости распространения света в вакууме  $c$  к скорости распространения света в данной среде  $v$ :

$$n = \frac{c}{v}. \quad (1.3)$$

Другими словами, в среде с показателем преломления  $n$ , свет распространяется в  $n$  раз медленнее, чем в вакууме. Показатель преломления среды, определенный относительно вакуума, называют также **абсолютным показателем преломления**.

Произведение показателя преломления на синус угла между лучом и нормалью называется **оптическим инвариантом**.

На рис. 1.4. показан ход светового луча, пересекающего границу двух прозрачных сред. Пусть световой луч падает на поверхность  $PP'$  разделяющую две прозрачные среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ , под углом  $\alpha$  к нормали  $NO$ . Во второй среде распространяется преломленный луч  $OA'$ , образующий с той же нормалью угол  $\alpha'$ , называемый **углом преломления**. Правило знаков для углов преломления то же самое, что и для углов падения и отражения (см. параграф 1.4). Явление преломления света было известно уже Аристотелю (350 лет до н.э.). Попытка установить количественный закон принадлежит знаменитому астроному Птолемею (120 г. н.э.), который предпринял измерение углов падения и преломления.

Однако измерения Птолемея относились к малым углам, и поэтому он пришел к неверному заключению о пропорциональности угла преломления углу падения.

Правильная формулировка закона преломления принадлежит Снеллиусу (1591 - 1626), указавшему в сочинении, оставшемся неопубликованным, что отношение косекансов углов падения и преломления остается постоянным, и Декарту, давшему в своем сочинении «Диоптрика» (1637 г.) современную формулировку закона преломления. Декарт установил свой закон около 1630 г.; были ли ему известны исследования Снеллиуса – не известно. Закон преломления в формулировке Декарта гласил, что отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = n_{21}, \quad (1.4)$$

где  $n_{21} = n'/n$  называется **относительным показателем преломления**.

Рассмотрим случай, когда свет распространяется из среды с большим показателем преломления в среду с меньшим показателем преломления. Из закона преломления (1.2) следует, что при  $n > n'$ , преломленный луч удаляется от нормали, то есть угол преломления будет больше угла падения  $\alpha > \alpha'$ . Если увеличивать угол падения  $\alpha$ , то будет возрастать и угол преломления  $\alpha'$ , и, наконец, наступит момент, когда угол преломления станет равным  $90^\circ$ , а  $\sin \alpha'$  равным единице. В этом случае преломленный луч будет распространяться вдоль границы раздела двух сред. Дальнейшее увеличение угла падения приведет к тому, что

$$\sin \alpha' = \frac{n}{n'} \sin \alpha > 1.$$

Синус угла преломления становится больше единицы, что противоречит определению синуса, и уравнение для угла преломления теряет смысл. Установлено, что в этом случае действительно не происходит преломления, а падающий луч полностью отражается от поверхности раздела в ту же среду, из которой он вышел. Это явление носит название **полного внутреннего отражения**. Угол падения  $\alpha_c$ , которо-



му соответствует угол преломления  $\alpha'$ , равный  $90^\circ$ , называется **предельным углом** полного внутреннего отражения.

Значение угла  $\alpha'_c$  определяют по формуле:

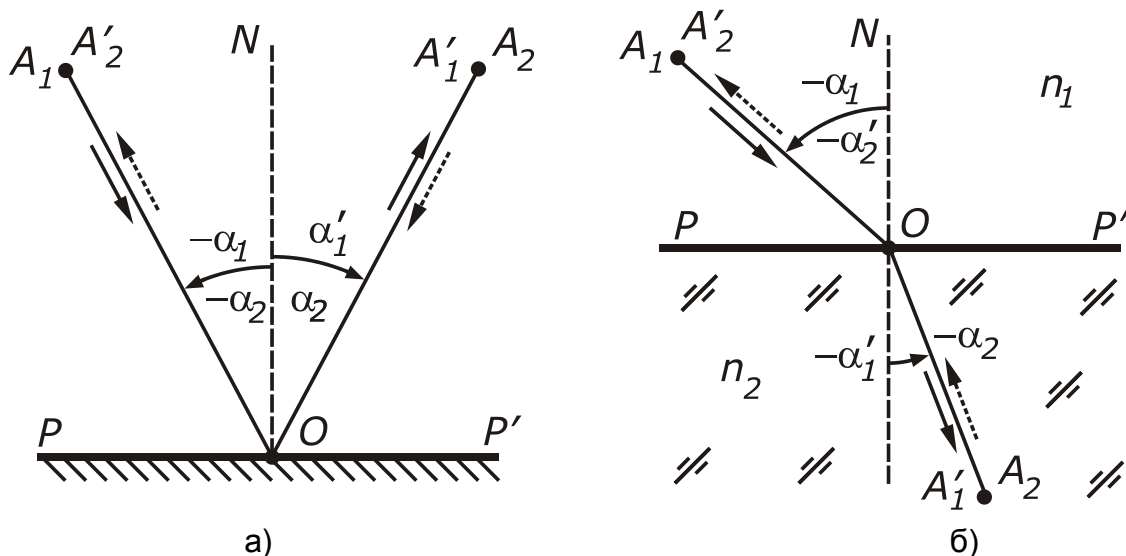
$$\sin \alpha_c = \frac{n'}{n} . \quad (1.4)$$

На рис.1.5 показано полное внутреннее отражение лучей, распространяющихся из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$  в воздух, имеющий показатель преломления  $n' = 1$ . Световые лучи 1, 2, и 3 падают на поверхность, разделяющую стекло и воздух. Преломившись, они распространяются в воздухе по направлениям 1', 2' и 3', соответственно. Луч 4 падает на поверхность стекла под углом  $\alpha_c = 41,8^\circ$ , который является предельным углом полного внутреннего отражения. Так как угол преломления  $\alpha'$  равен  $90^\circ$ , то преломленный луч 4' направлен вдоль поверхности стекла. Луч 5, падающий на поверхность стекла под углом, превышающим предельный, испытывает полное внутренне отражение. Направление отраженного луча 5' в этом случае определяются в соответствии с законом отражения света.

При полном внутреннем отражении световая энергия отражается практически полностью, без малейших потерь (именно поэтому оно называется «полным»). Для сравнения, качественные зеркала с алюминиевым или серебряным покрытием отражают не более 85% процентов падающего на них света. Поэтому полное внутреннее отражение широко используют при конструировании различных **отражательных призм**, изменяющих направление световых лучей и волоконно-оптических **световодов**, передающих световую энергию на большие расстояния.

Закон отражения и закон преломления также справедливы лишь при соблюдении известных условий. В том случае, когда размер отражающего зеркала или поверхности, разделяющей две среды, сравним с длиной волны света, наблюдаются заметные отступления, от указанных выше законов, обусловленные дифракцией.

Помимо дифракционных явлений, основные законы, обсуждавшиеся выше, могут нарушаться и в случае нелинейных явлений, наблюдаемых при достаточно большой интенсивности световых пучков.



**Рис.1.6.** Обратимость хода лучей при отражении (а) и преломлении (б).

Однако для обширной области явлений, наблюдаемых в обычных оптических приборах, эти законы соблюдаются достаточно строго.

## 5. ЗАКОН ОБРАТИМОСТИ ХОДА ЛУЧЕЙ

**При изменении направления лучей на противоположное их взаимное расположение не изменяется.**

Опираясь на уже сформулированные законы, мы можем доказать этот закон для случаев, когда свет распространяется в однородной среде, отражается зеркальной поверхностью и преломляется на границе двух прозрачных сред.

Пусть световой луч проходит через две точки, в однородной среде. Согласно закону прямолинейного распространения света, в этом случае его траектория будет представлять собой прямую линию. Теперь направим еще один луч так, чтобы он проходил через те же самые две точки, но в обратном порядке. Он также, согласно закону прямолинейного распространения света в однородной среде, будет распространяться вдоль прямой линии. Так как через две точки пространства можно провести только одну прямую линию, то оба эти луча **совпадут**.

Теперь рассмотрим отражение света зеркальной поверхностью. Пусть луч  $A_1O$  (рис.1.6(а)) падает на зеркальную поверхность  $PP'$  в точке  $O$ . Образуя с нормалью  $ON$  угол  $-\alpha_1$ . (Угол имеет знак «минус», так как отсчитывается от нормали к лучу в направлении против часо-

вой стрелки, см. параграф 1.4). Согласно закону отражения, луч  $OA'_1$ , будет лежать в одной плоскости с падающим лучом  $A_1O$  и нормалью к поверхности  $ON$ . Угол между нормалью к поверхности и отраженным лучом определяется по формуле (1.1):

$$\alpha'_1 = -\alpha_1 \quad (1.5)$$

Ход лучей в направлении  $A_1OA'_1$  показан сплошными стрелками.

Направим теперь в точку еще один луч  $A_2O$ . Пусть этот луч образует с нормалью к поверхности угол

$$\alpha_2 = \alpha'_1 \quad (1.6)$$

то есть луч  $A_2O$  будет совпадать с лучом  $OA'_1$ , но при этом распространяться в противоположном направлении (пунктирная стрелка).

Применив закон отражения еще раз, найдем угол, который образует с нормалью отраженный луч  $OA_2$

$$\alpha'_2 = -\alpha_2 \quad (1.7)$$

Используя равенства (1.5) – (1.7), получаем:

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \quad (1.8)$$

То есть отраженный луч  $OA'_2$  **совпадает** с лучом  $A_1O$ , так как оба луча проходят через одну и ту же точку  $O$  и пересекают нормаль к поверхности под одним и тем же углом.

Аналогичным образом рассмотрим преломление лучей на границе двух прозрачных сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 1.6 (б)). Луч  $A'_1O$  падает в точку  $O$  под углом  $-\alpha_1$  к нормали  $ON$ . Из закона преломления (1.2) получаем:

$$-n_2 \sin \alpha'_1 = -n_1 \sin \alpha_1 \quad (1.9)$$

Для луча  $A_2O$ , падающего в точку  $O$  из среды с показателем преломления  $n_2$  выбираем угол падения

$$\alpha_2 = \alpha'_1 \quad (1.10)$$

Из закона преломления (1.2):

$$-n_1 \sin \alpha'_2 = -n_2 \sin \alpha_2 \quad (1.11)$$

И окончательно получаем из (1.9) – (1.11):

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \quad (1.12)$$

То есть лучи  $OA'_2$  и  $A_1O$  **совпадают**.

Так как закон обратимости выполняется для распространения, отражения и преломления света, он будет выполняться и для комбинации этих процессов. ***Пусть луч, испытывая ряд последовательных отражений и преломлений, проходит через какую-либо точку. Если изменить направление этого луча на противоположное, то он пройдет через ту же самую точку.***

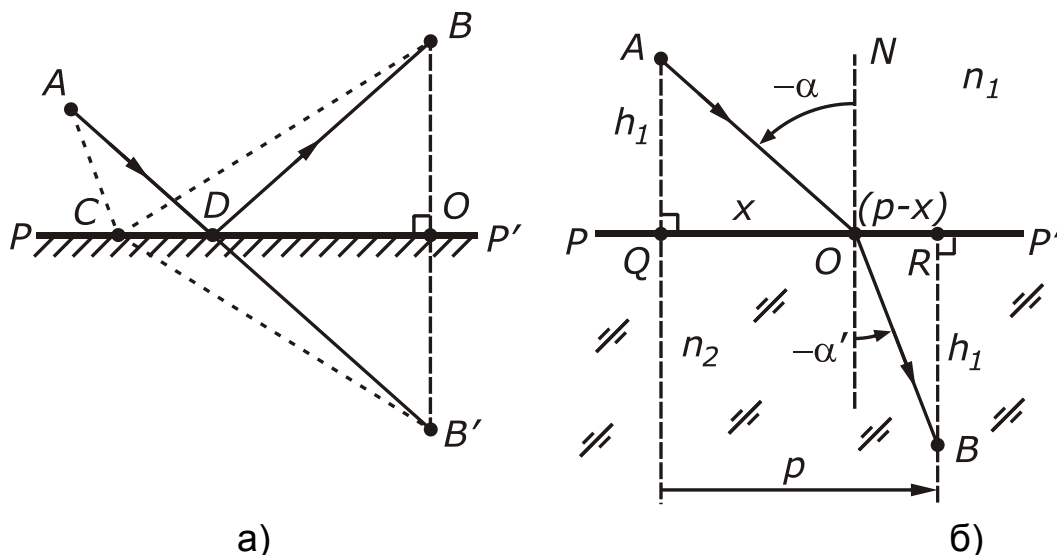
Также как и остальные законы оптики, рассмотренные в этом разделе, закон обратимости хода лучей выполняется не всегда. Направление и скорость распространения света в прозрачных кристаллах зависит от состояния ***поляризации света***. Используя это свойство, можно создать так называемый ***оптический изолятор*** – устройство, которое пропускает свет только в одном направлении. Действие оптического изолятора может быть также основано на ***эффекте Фарадея*** – вращении плоскости линейной поляризации света в веществе, помещенном в магнитное поле.

Несмотря на кажущуюся очевидность, закон обратимости света выражает некоторую общую идею, которая содержится в законах оптики. Ее можно сформулировать следующим образом: свет, проходя из одной точки в другую, независимо от направления распространения выбирает ***один и тот же путь***. Чем же этот путь, выбранный светом, отличается от остальных возможных путей? Ответ на этот вопрос нашел французский математик Пьер де Ферма.

### **1.2. Принцип Ферма**

Пьер Ферма около 1660 г. впервые предложил общий принцип, наглядно объясняющий поведение света, который получил название ***принципа наименьшего времени***. Его можно сформулировать следующим образом: ***действительный путь распространения света есть путь, для прохождения которого свету требуется минимальное время по сравнению с любым другим мыслимым путем между теми же точками.***

Еще Герон Александрийский (120 г. до н.э.) высказал утверждение, что свет при отражении идет из одной точки в другую ***по кратчайшему пути***. Именно это вдохновило Ферма, и он попробовал применить этот принцип к явлению преломления. Но свет, преломляясь, очевидным образом идет не по кратчайшему пути, и тогда Ферма



**Рис.1.7.** Вывод закона отражения (а) и преломления (б) из принципа Ферма.

предложил другой принцип — свет выбирает путь, **время прохождения по которому наименьшее**.

В однородной среде, когда скорость распространения света остается постоянной, идея Герона и принцип Ферма эквивалентны. Согласно геометрической аксиоме о том, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве, этот принцип приводит к закону прямолинейного распространения света в однородной среде.

До и после отражения свет распространяется в одной и той же однородной среде, и его скорость остается неизменной. Поэтому в случае отражения геометрически кратчайший путь также является путем, время прохождения которого минимально.

Рассмотрим отражение света от зеркальной поверхности  $PP'$  (рис.1.7 (а)). Пусть свет распространяется из точки  $A$  в направлении к зеркальной поверхности, а затем, отражаясь от нее, проходит через точку  $B$ . Предположим, что луч падает на зеркало в некоторой произвольной точке  $C$ . До и после отражения свет распространяется в однородной среде, поэтому скорость его постоянна, а время распространения пропорционально сумме длин отрезков  $AC$  и  $BC$ . Найдем такое положение точки  $C$ , при котором эта сумма будет минимальной. Для этого выполним следующее построение. Из точки  $B$  опустим перпендикуляр  $BO$  на зеркальную поверхность. На продолжении этого

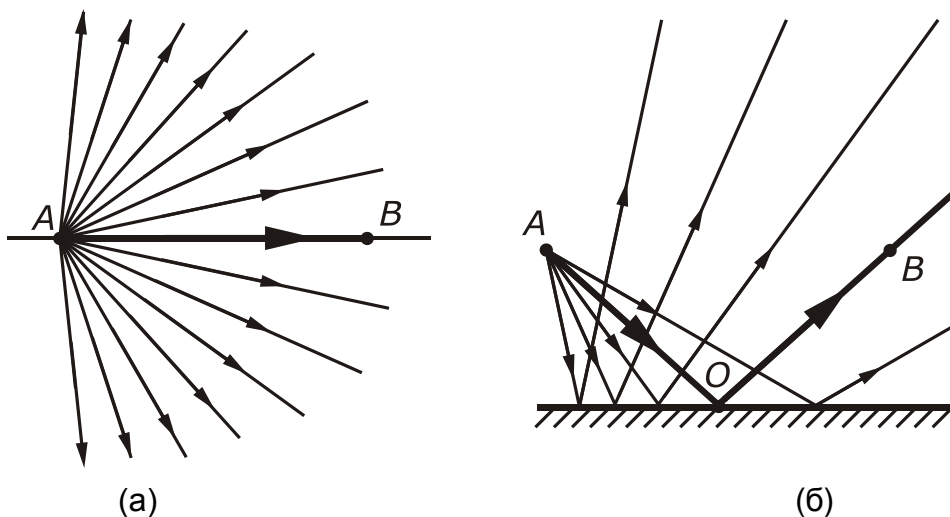


перпендикуляра отметим точку  $B'$  таким образом, чтобы  $BO = OB'$ . Поскольку угол  $BOC$  прямой, то  $CB = CB'$ .

Следовательно, сумма длин отрезков  $AC + CB$ , будет равна сумме длин  $AC + CB'$ . Рассмотрим треугольник  $ACB'$ . Из геометрии известно, что сумма длин двух любых сторон треугольника всегда больше длины третьей стороны. Следовательно, сумма длин отрезков  $AC + CB'$  минимальна, когда точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ , то есть совпадает с точкой  $D$  на рис. 1.7(а). Далее, если  $ADB'$  — прямая линия, угол  $BDO$  равен углу  $B'DO$  и, следовательно, углу  $ADP$ . Таким образом, утверждение о равенстве углов падения и отражения равносильно утверждению, что свет при отражении от зеркала в точку  $B$ , выбирает путь, требующий **наименьшего времени**. Так как точка  $D$  лежит на прямой  $AB'$ , то отраженный луч  $DB$  лежит в плоскости, определяемой нормалью  $BB'$  и падающим лучом  $AB'$ .

Исходя из принципа наименьшего времени распространения, можно вывести закон преломления света на границе двух прозрачных сред, если предположить, что скорость распространения света в этих средах различна. Пусть свет, исходя из точки  $A$ , приходит в точку  $B$ , преломляясь на плоской границе  $PP'$  двух сред (рис. 1.7(б)). Проведем через точки  $A$  и  $B$  плоскость, перпендикулярную поверхности  $PP'$  (плоскость рисунка). Любой путь, лежащий вне этой плоскости, проходится светом за большее время, чем путь, лежащий в ней. Предположим, что свет, распространяясь из точки  $A$  в  $B$ , пересекает плоскую границу сред в точке  $O'$ , лежащей вне плоскости падения. Тогда опустим из точки  $O'$  перпендикуляр на плоскость падения, который пересечет ее в точке  $O$ . Так как плоскость падения перпендикулярна границе раздела сред, точка  $O$  будет лежать на пересечении этих плоскостей. Рассмотрим путь света в первой среде. Так как угол  $O'OA$  прямой, то гипотенуза  $AO'$  треугольника  $O'OA$  всегда будет больше его катета  $AO$ . Во второй среде аналогично получаем  $BO' > BO$ . Следовательно, путь, требующий минимального времени, должен лежать в плоскости падения, что согласуется с законом преломления света.

Для того, чтобы из всех путей от  $A$  до  $B$ , лежащих в плоскости падения, выбрать путь, требующий минимального времени, исследуем, как меняется это время в зависимости от положения точки  $O$  на



**Рис.1.8.** Единственность действительного пути света между точками  $A$  и  $B$  в однородной среде (а) и при отражении от плоского зеркала (б)

линии пересечения плоскости падения и плоскости раздела (рис.1.7(б)). Из точек  $A$  и  $B$  проведем перпендикуляры  $AQ$  и  $BR$  на плоскость  $PP'$ . Определим положение точки относительно точки  $Q$ , обозначив отрезок  $QO = x$ . Время прохождения светом пути  $AOB$  составит:

$$t = \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2}, \quad (1.13)$$

где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости света в первой и второй средах. Обозначив  $AQ = h_1$ ,  $BR = h_2$  и  $QR = p$ , найдем, что

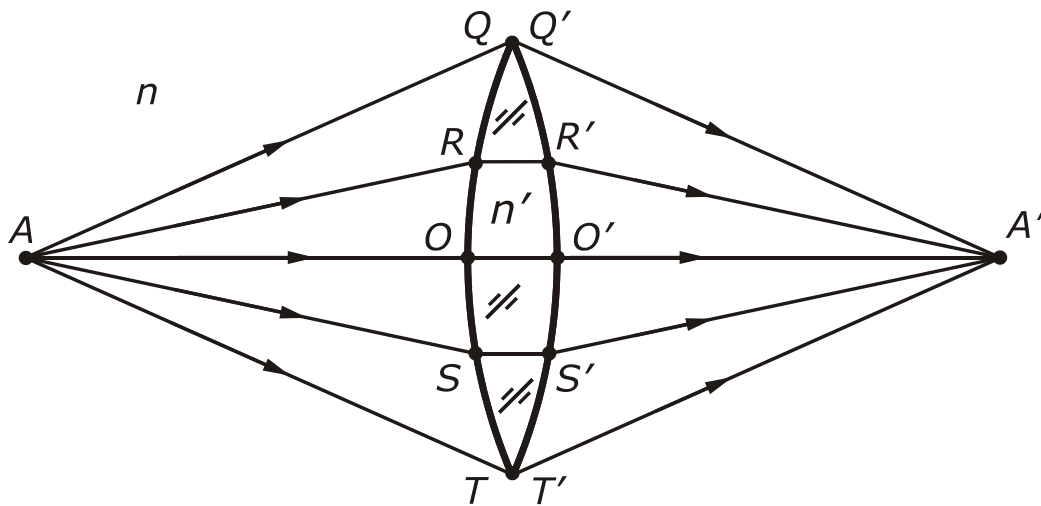
$$t = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (p - x)^2}}{v_2} \quad (1.14)$$

Условие, определяющее, при каком значении  $x$ , это время  $t$  будет минимально, есть  $\frac{dt}{dx} = 0$ . Из него следует:

$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{p - x}{\sqrt{h_2^2 + (p - x)^2}} = 0 \quad (1.15)$$

т. е.

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} - \frac{\sin \alpha'}{v_2} = 0 \quad (1.16)$$



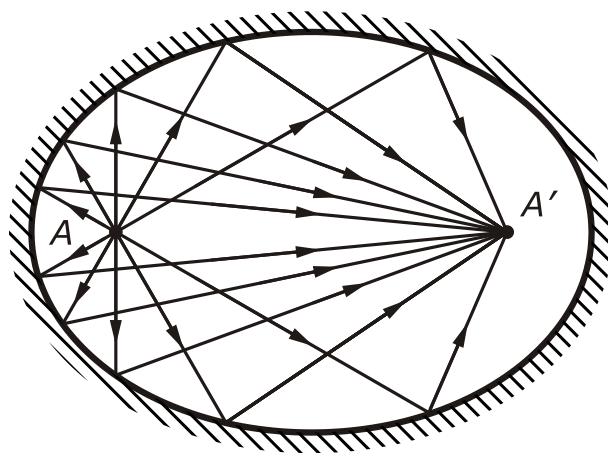
**Рис.1.9.** Собирающая линза.

Полагая  $n_1 = c/v_1$  и  $n_2 = c/v_2$ , получим закон преломления света:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.17)$$

Из выражения (1.17) видно, что отношение синусов угла падения и угла преломления есть отношение скоростей света в двух средах.

Приведенные рассуждения показывают, что исходя из принципа наименьшего времени распространения, можно отыскать действительный путь распространения света между двумя заданными точками. Если свет распространяется из одной точки в другую в **однородной** среде, то такой путь, будет **единственным**. На рис.1.8(а) показаны световые лучи, выходящие из точки *A* в разных направлениях. Из них только один луч пойдет через точку *B*. Этот луч направлен вдоль прямой, проходящей через обе точки. Остальные лучи, распространяясь прямолинейно в других направлениях, в точку *B* не попадут. Путь, требующий наименьшего времени, также будет единственным при отражении света **плоской поверхностью** (рис. 8 (б)). Свет испускается из точки *A* в разных направлениях. Но в точку *B* приходит единственный луч, который отражается от зеркала в точке *O*. Точно также будет **единственным** действительный путь света, преломляющегося на **плоской** границе двух прозрачных сред. Но так бывает не всегда. Между двумя заданными существует множество различных путей. Если среди них найдется путь, время прохождения которого минимально, то свет выберет именно его. А если время прохождения



**Рис.1.10.** Эллиптическое зеркало

всех путей будет **одинаково**, то и свет будет распространяться по всем путям одинаково. И выходя в разных направлениях по разным путям из одной точки, он будет собираться обратно в другой. Этот принцип лежит в основе действия оптических систем.

Например, на рис. 1.9 показана линза, которая собирает в точке  $A'$  свет, выходящий в разных направлениях из точки  $A$ . Свет попадает в точку  $A'$ , распространяясь не только вдоль прямой линии  $AA'$ , но также и по другим траекториям, например,  $AQQ'A'$ . Геометрически путь  $AQQ'A'$  значительно длиннее, чем  $AOO'A'$  и он должен занимать больше времени. Но линза изготовлена из стекла, скорость света в котором меньше, чем в воздухе. Поэтому путь света в стекле на отрезке  $OO'$  в точности компенсирует добавочное время, затрачиваемое светом на прохождение искривленного пути  $AQQ'A'$ . Форма линзы такова, что все лучи, проходят через линзу из точки  $A$  в точку  $A'$  за одинаковое время. Такие пути часто называют **таутохронными**, то есть совпадающими по времени, ибо свет по этим не равным по геометрической длине путям распространяется за одно и тоже время. Время распространения лучей по различным путям между двумя точками можно выравнивать, используя не только преломляющие, но и отражающие поверхности. Поскольку свет до и после отражения распространяется в одной и той же среде с постоянной скоростью, то время распространения пропорционально длине пути.

Поэтому требование равенства времени сводится к требованию равенства полных длин путей. Этому условию удовлетворяет эллип-

соид вращения – так как сумма расстояний от любой точки на его поверхности до двух заданных точек, называемых фокусами, постоянна. Поэтому свет, отразившись от зеркала в форме эллипсоида, попадет из одного его фокуса в другой (рис.1.10).

Так как в точке  $A'$  собираются лучи, выходящие из точки  $A$ , то говорят, что она является **изображением** точки  $A$ . Если переместить точку  $A$  относительно линзы, то свет будет собираться в другой точке, в которую ведут таутохронные пути из нового положения точки  $A$ . Поэтому положение изображения, даваемого линзой, зависит от положения предмета. Исследование свойств изображений, получаемых с помощью оптических приборов, является одной из важнейших задач геометрической оптики.

Для того, чтобы принцип Ферма выражал действительное положение дел, ему надо дать более общую формулировку, чем это было сделано самим Ферма; именно, действительный путь соответствует **экстремуму** времени распространения. То есть время прохождения света по действительному пути может быть **минимальным, максимальным** или **равным** по времени распространения всем остальным возможным путям между двумя заданными точками. То есть, например, условие  $\frac{dt}{dx} = 0$  которым мы пользовались, отыскивая действительный

путь света через плоскую границу сред не обязательно должно быть условием минимума, оно может быть также условием максимума или стационарности времени распространения. Другими словами равенство нулю первой производной времени распространения означает, что любое малое изменение действительного пути **не приводит** в первом порядке к изменению времени прохождения; изменение времени распространения происходит только во втором порядке. Другими словами, свет выбирает этот путь из множества близлежащих, требующих почти одинакового времени распространения.

С принципом Ферма связана еще одна трудность. С точки зрения законов преломления и отражения все происходит достаточно просто – свет падает на поверхность и отклоняется, потому что на этой поверхности с ним что-то происходит. Легко понять идею причинности, проявляющуюся в том, что свет идет из одной точки в другую, а затем в следующую. Но принцип наименьшего времени есть фило-



софский принцип, который совсем иначе объясняет причину явлений в природе. Вместо причинной обусловленности, когда из одного действия вытекает другое и т.д., этот принцип говорит следующее: в данной ситуации **свет** выбирает путь с наименьшим, или экстремальным временем. Вопрос о том, как именно свет это делает, имеет очень глубокий физический смысл. Однако ответ на него выходит за рамки геометрической оптики, так как он связан уже с волновыми свойствами света.

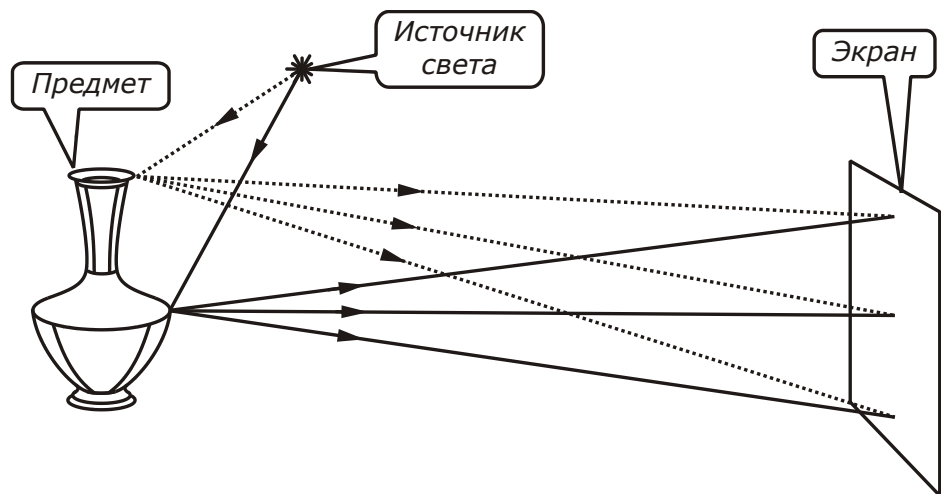
### **1.3. Оптическое изображение и основные понятия геометрической оптики**

Мы видим предметы, потому что свет переносит энергию от источника света к предмету, а затем от предмета к глазу. Каждая точка освещенной поверхности предмета отражает свет и рассеивает его во всех направлениях, становясь вторичным источником света. Глаз определяет пространственное положение источников света и количество излучаемой ими энергии, а мозг, используя эту информацию, создает зрительный образ предмета.

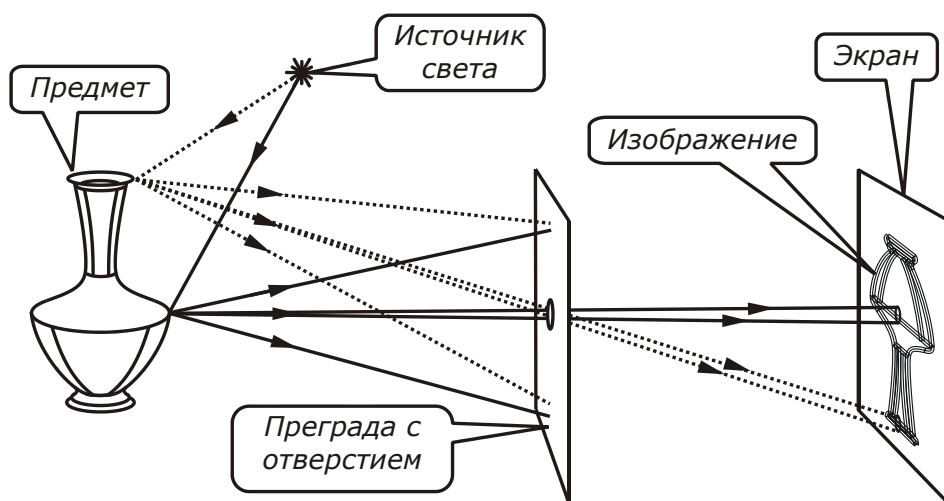
Поместим экран на некотором расстоянии от предмета, освещенного источником света (рис.1.11 (а)). Поверхность экрана окажется более или менее равномерно освещенной рассеянным светом. Это происходит потому, что в каждую точку экрана попадают лучи, исходящие из всех точек предмета и согласно закону независимости световых пучков (см п.1.1) их интенсивности складываются.

Если между экраном и предметом поместить непрозрачную преграду с небольшим отверстием, то на экран попадут только те лучи, которые проходят через это отверстие (рис.1.11 (б)). Лучи, исходящие из каждой точки предмета и распространяющиеся прямолинейно, будут попадать только в определенную область экрана, размер которой зависит от размера отверстия в преграде. В результате распределение интенсивности света на экране будет геометрически подобно форме объекта. Это распределение интенсивности называется **изображением** предмета.

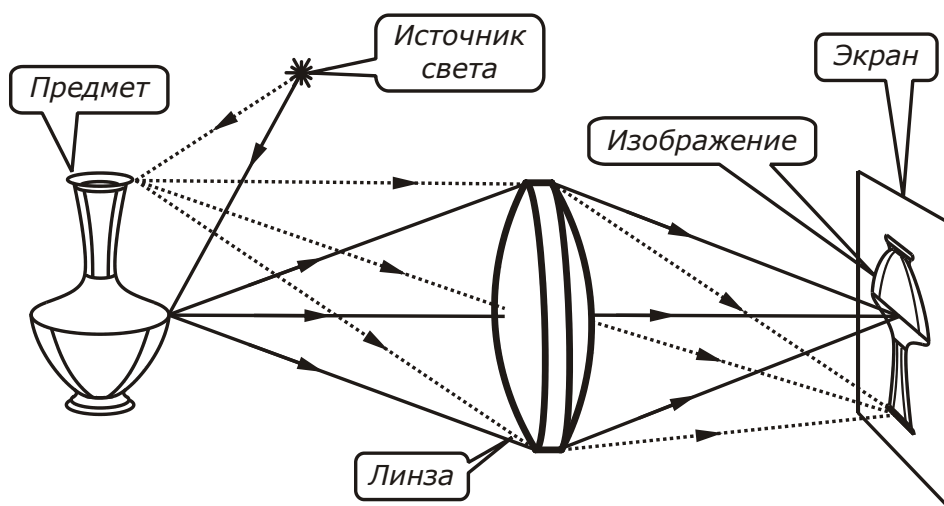
Изображение, полученное при помощи малого отверстия, несовершенно, потому что каждая точка предмета окажется изображенной виде кружка довольно больших размеров. Уменьшая отверстие до некоторых пределов, можно повысить качество изображения.



а)

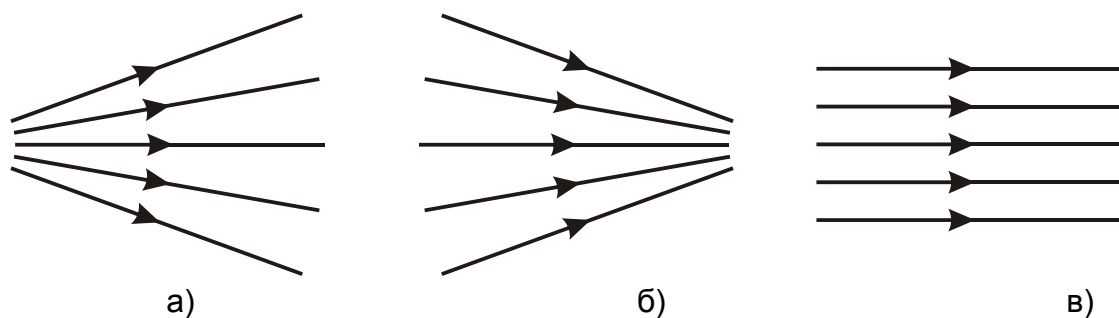


б)



в)

**Рис.1.11.** Формирование оптического изображения.



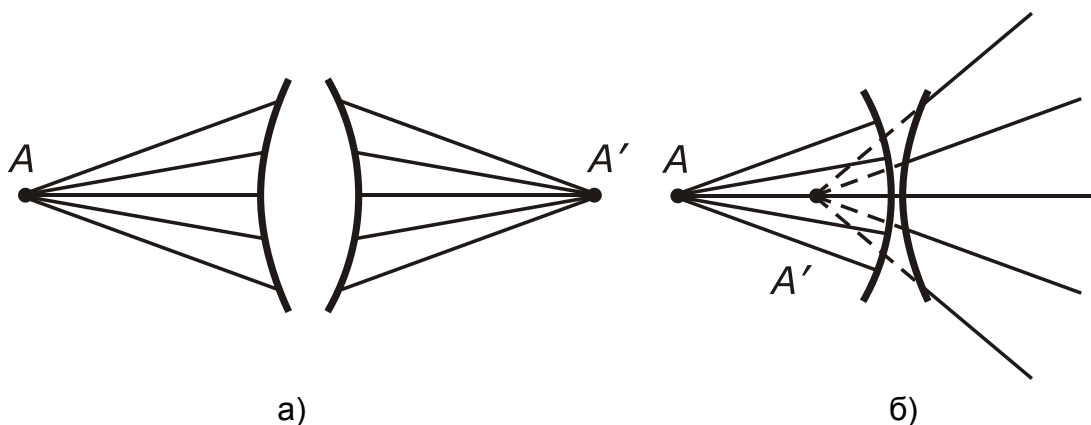
**Рис. 1.12.** Гомоцентрические пучки лучей

Но дальнейшее уменьшения отверстия приведет к размытию изображения в результате дифракции света. Так как отверстие пропускает лишь малую часть рассеянного предметом света, то изображение получается очень темным.

Каждая точка предмета рассеивает свет в разных направлениях. Для того, чтобы получить качественное изображение, нам нужно собрать как можно больше света, испускаемого этой точкой, в какой-то одной точке экрана. Согласно принципу Ферма, для этого нужно сделать так, чтобы время прохождения всех лучей из данной точки предмета до некоторой точки экрана было одинаковым. Этого можно достичь, поместив, например, между предметом и экраном линзу (см. п. 1.2) (рис. 1.11 (в)). Линза будет собирать свет, рассеянный каждой точкой предмета в соответствующей ей точке изображения на поверхности экрана. На экране мы увидим изображение – распределение интенсивности света, геометрически подобное предмету.

Нужно заметить, что на самом деле изображение каждой точки предмета всегда будет представлять собой пятнышко конечного размера. Форма и размер этого пятнышка определяются волновыми свойствами света, а также геометрическими эффектами при преломлении и отражении лучей на поверхностях линз и зеркал – так называемыми **абберациями** оптических систем.

Конечно, дифракция и абберации влияют на качество изображения, получаемого при помощи оптической системы. Однако в первом приближении этими эффектами можно пренебречь и считать, что изображение точки представляет собой точку. Основными понятиями геометрической оптики являются понятия о светящейся точке,



**Рис. 1.13.** Точка предмета и ее изображение.

световом луче и гомоцентрическом пучке. Под **светящейся точкой** понимают источник излучения, не имеющий размеров, а под **световым лучом** – геометрическую линию, не имеющую размеров в поперечном сечении. Таким образом, светящаяся точка и световой луч реально не существуют, а являются лишь удобной математической моделью.

Совокупность световых лучей называется световым пучком. Пучок, лучи которого имеют общую точку пересечения, называется **гомоцентрическим**, то есть имеющим общий центр. Пучок, лучи которого расходятся от общего центра, называется **расходящимся гомоцентрическим** пучком (рис.1.12. (а)); если лучи сходятся по направлению к общему центру, то пучок называется **расходящимся гомоцентрическим пучком** (рис.1.12. (б)). Гомоцентрический пучок может распространяться от светящейся точки, находящейся в бесконечности, – в этом случае он будет параллельным (рис. 1.12. (в)).

Центр гомоцентрического пучка, входящего в оптическую систему, называют точкой предмета (точка  $A$  на рис. 1.13.); центр гомоцентрического пучка, вышедшего из оптической системы – точкой изображения (точка  $A'$ ). Все пространство, в котором распространяются пучки лучей, делится на две части. Пространство, в котором находятся точки предметов, называется **пространством предметов**; пространство, в котором расположены изображения точек, называется **пространством изображений**. Пространства предметов и изображений не имеют ограничений. Изображения предмета получают путем построения его из отдельных точек. Если после прохождения через оптическую систему пучки лучей сохраняют гомоцентричность, то каждой точке предмета соответствует только одна точка изображения. Такие

изображения называют **точечными** или **стигматическими**. Две точки, одна из которых является изображением другой, называются сопряженными (точки  $A$  и  $A'$  на рис.1.13.). Каждому лучу пучка, выходящему из точки предмета, соответствует один определенный луч, проходящий через сопряженную точку – точку изображения. Эти лучи называются также **сопряженными**. Сопряженными будут и соответствующие друг другу гомоцентрические пучки лучей и пространства, в которых они распространяются. То есть пространство изображений сопряжено с пространством предметов.

Изображение называется **действительным**, если после выхода из оптической системы лучи гомоцентрического пучка пересекаются в их геометрическом центре (рис. 1.13 (а)). Если в геометрическом центре пересекаются продолжения лучей расходящегося пучка, то такое изображение точки называется **мнимым** (точка  $A'$  на рис.1.13(б)). Действительное изображение может быть принято на экране или на фотопластинке; мнимое изображение непосредственно спроецировать на экран нельзя, но оно может быть рассмотрено глазом также как и действительное изображение.

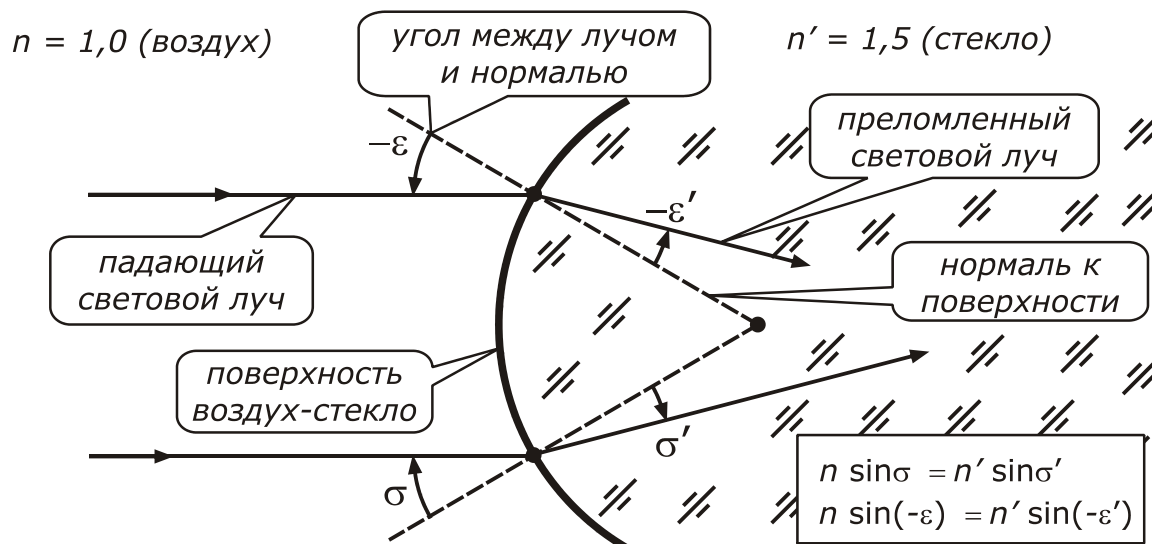
В реальных системах нарушается гомоцентричность пучка в пространстве изображений. Пучок, лучи которого после выхода из оптической системы не пересекаются в одной точке, называется **астигматическим**.

#### **1.4. Правила знаков**

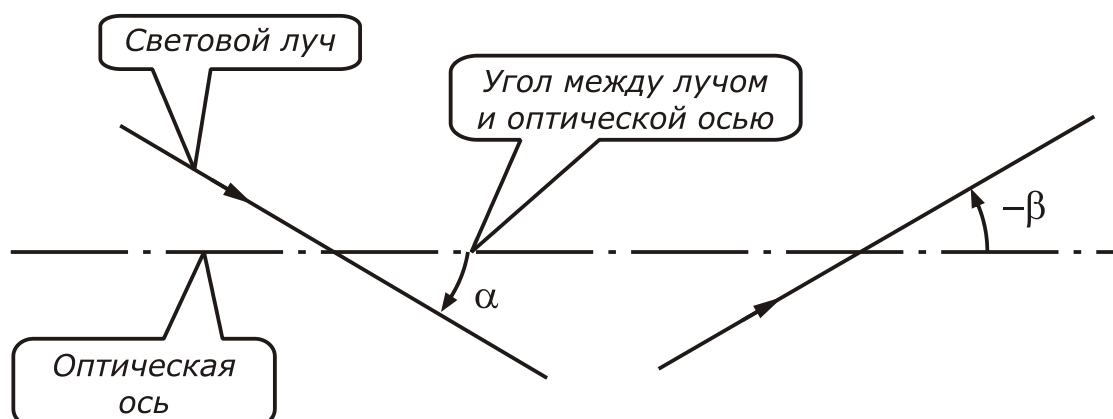
При построении чертежей и выводе различных соотношений в геометрической оптике все отрезки, длины и углы имеют знак, то есть отрезки и углы могут иметь как положительные, так и отрицательные величины. Эти знаки вводятся для однозначной связи между чертежами и соотношениями геометрической оптики. Правила отсчета различных углов и отрезков в геометрической оптике называются **правилами знаков**.

За **положительное** направление принимают направление распространения света **слева направо**. Для каждого отрезка указывают направление отсчета; для определения знаков углов выбирают оси, от которых отсчитывают углы. При расчетах будем пользоваться следующими правилами знаков:

1. Угол между лучом и нормалью к поверхности в точке падения луча отсчитывается от нормали и считается положительным, если его можно образовать вращением луча от нормали по часовой стрелке, и отрицательным – если луч нужно вращать против часовой стрелки.



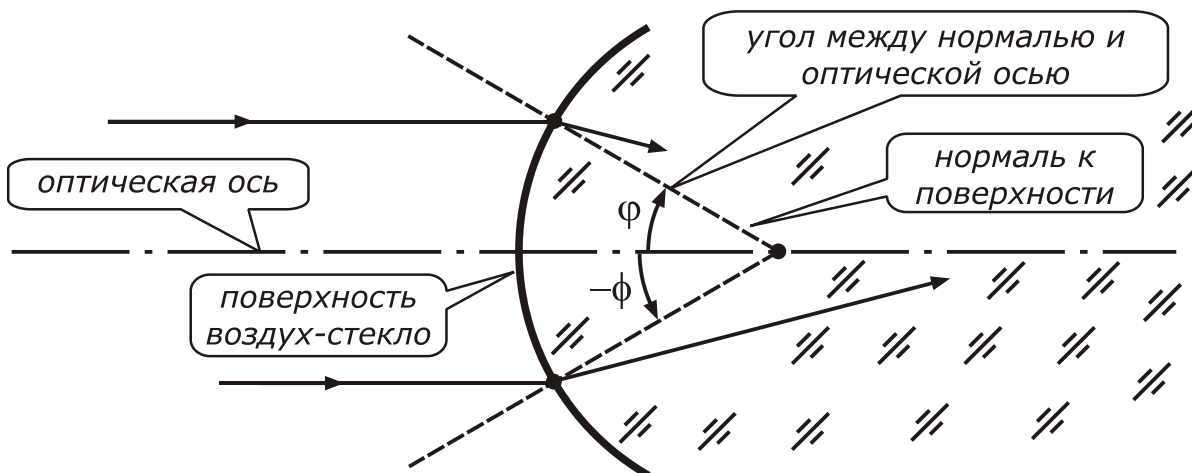
2. Угол между лучом и оптической осью отсчитывается от оптической оси и считается положительным, если он образован вращением луча по ходу часовой стрелки. При вращении луча в противоположную сторону угол считается отрицательным.



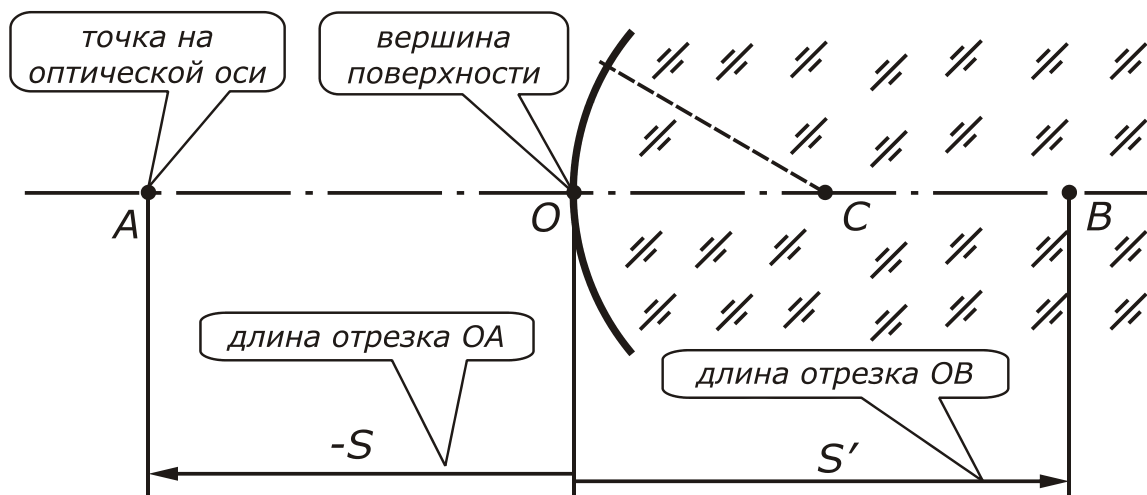
3. Угол между нормалью к поверхности и оптической осью отсчитывается от оси и считается положительным, если он образован вращением нормали от оси по ходу часовой стрелки, при вращении нормали в противоположную сторону – угол отрицательный.

$n = 1,0$  (воздух)

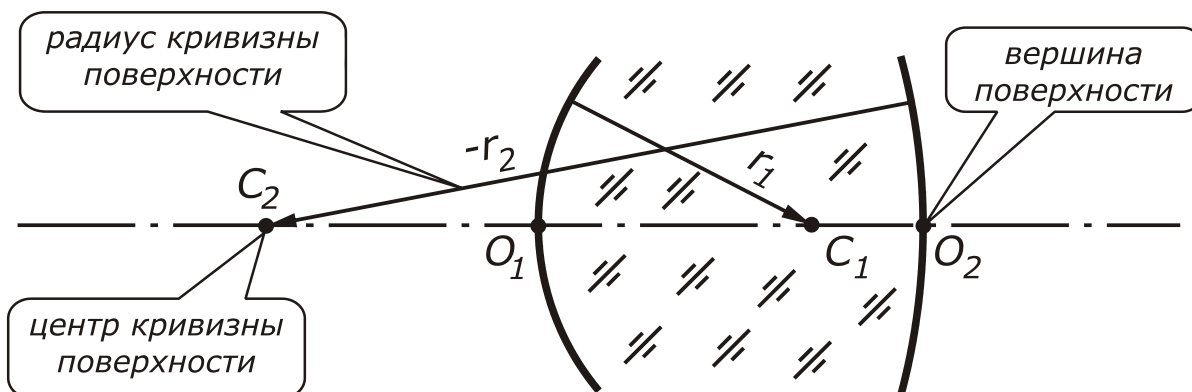
$n' = 1,5$  (стекло)



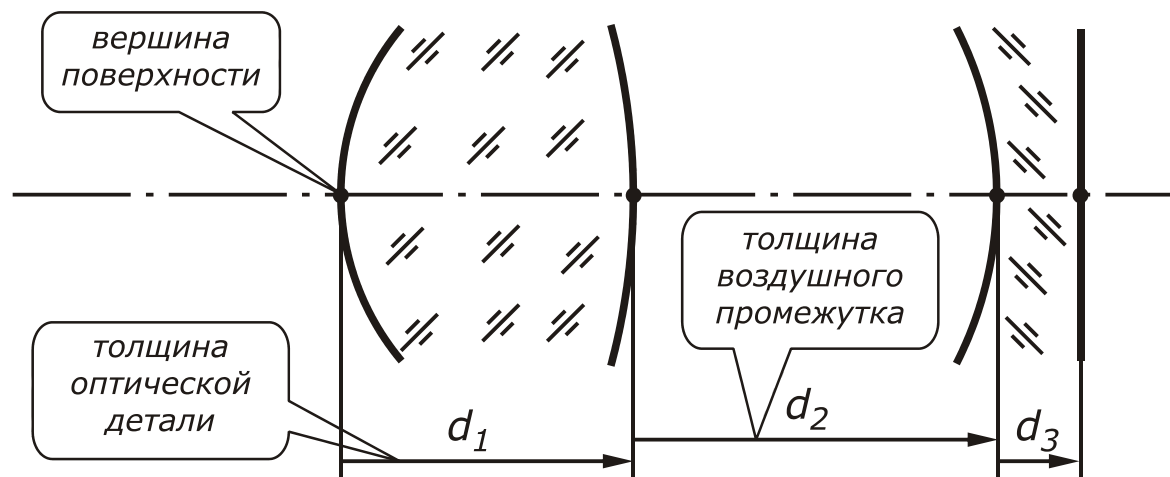
4. Длины отрезков, отложенных вдоль оптической оси, считаются положительными, если их направление совпадает с направлением распространения света, и отрицательными при обратном направлении.



5. Радиус кривизны поверхности отсчитывают от вершины поверхности и считают положительным, если центр кривизны расположен справа от вершины, и отрицательным, если слева от вершины.

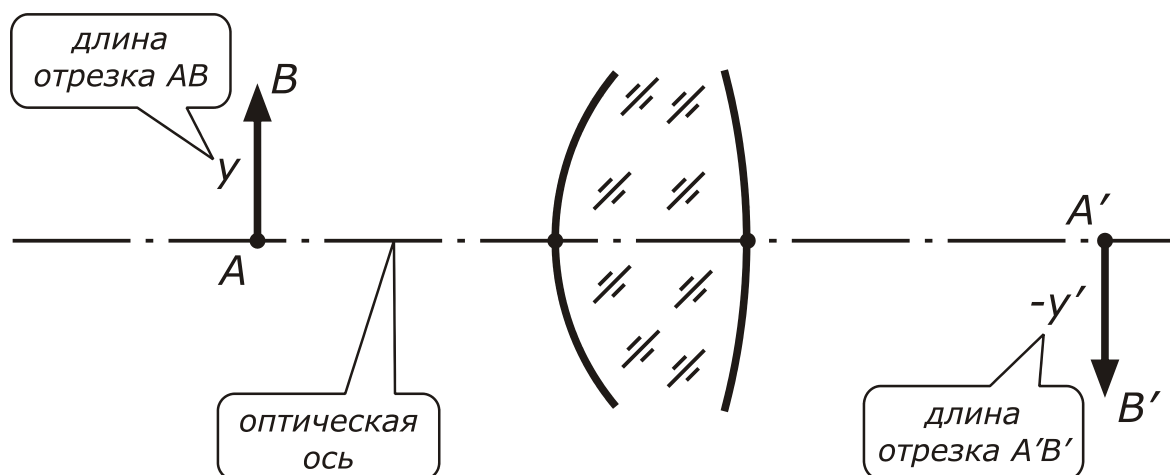


6. Толщины оптических деталей и воздушных промежутков между преломляющими поверхностями всегда считаются положительными.





**7. Отрезки, перпендикулярные оптической оси, считаются положительными, если они расположены над оптической осью, и отрицательными, если они расположены под осью.**



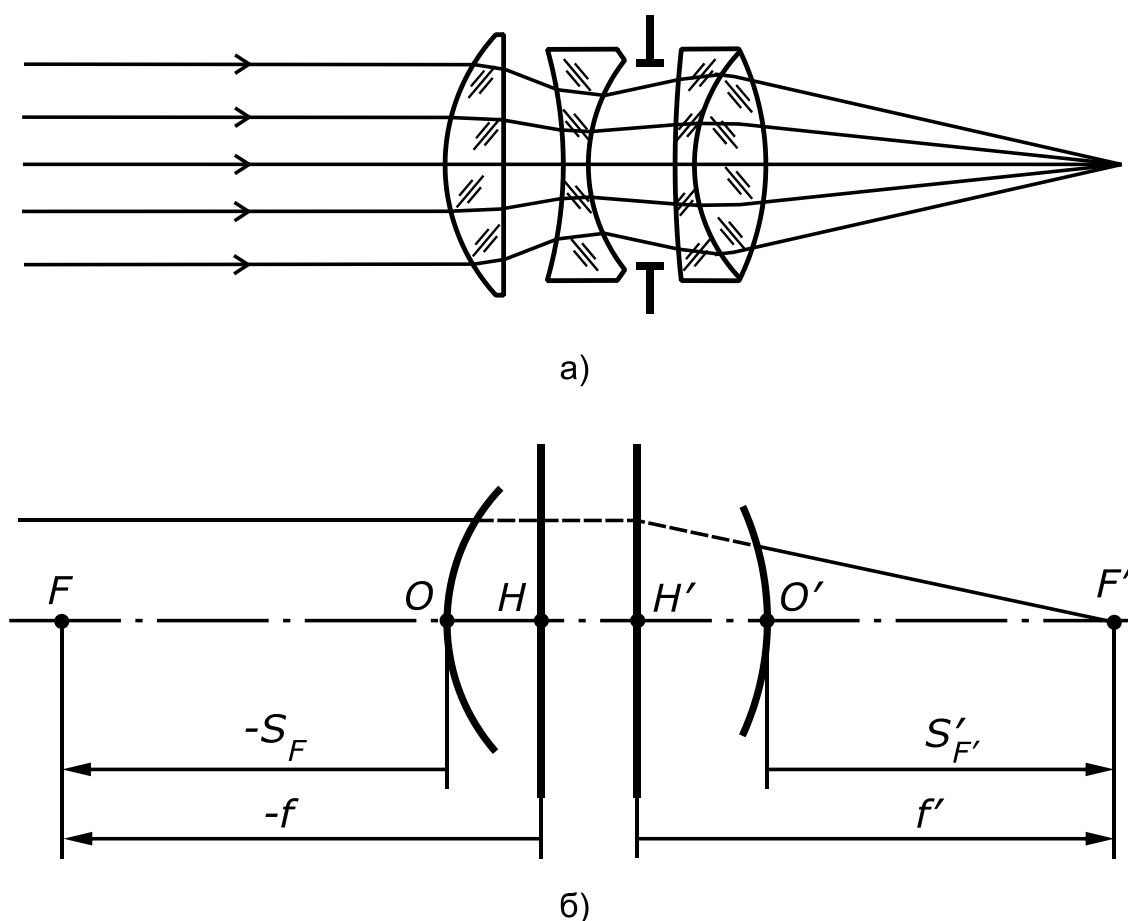
**Все отрицательные величины (углы, отрезки) на чертежах отмечают знаком «минус» перед их буквенным обозначением. Знак «плюс» при обозначении положительных величин на чертежах опускается. При выводе формул необходимо учитывать знаки величин.**

## 2. Теория идеальной оптической системы

### 2.1. Оптическая система

Оптической системой называется совокупность оптических деталей (линз, призм, зеркал и т.д.), предназначенная для формирования пучков световых лучей. Оптическая система должна удовлетворять различным требованиям в зависимости от тех условий, в которых она применяется. Назначение оптической системы определяет ее сложность – то есть количество деталей.

Каждая оптическая деталь ограничивается поверхностью, на которой лучи испытывают преломление или отражение. Поверхности могут быть плоскими, сферическими, асферическими, цилиндрическими и др. В большинстве оптических систем применяют сферические и плоские поверхности. В дальнейшем будут рассматриваться центрированные оптические системы, состоящие из сферических преломляющих и отражающих поверхностей, центры кривизны которых расположены на одной прямой, называемой **оптической осью системы**. Очевидно, что такая система будет полностью симметрична относительно оптической оси. Любая плоскость, содержащая оптическую ось, называется **меридиональной плоскостью**. Оптическая система характеризуется рядом конструктивных параметров, таких как радиусы кривизны поверхностей; расстояниями между точками пересечения сферических поверхностей с оптической осью (эти точки называются вершинами оптических поверхностей); показателями преломления всех сред, разделяемых сферическими поверхностями.



**Рис.2.1.** Оптическая схема фотографического объектива «Тессар» (а) и графическое изображение эквивалентной идеальной оптической системы (б).

В качестве примера центрированной оптической системы на рис. 2.1 представлен один из наиболее известных в мире фотографических объективов - «Тессар», рассчитанный конструктором фирмы «Карл Цейсс» Паулем Рудольфом в 1902 году. Этот объектив состоит из четырех оптических деталей, ограниченных сферическими поверхностями и изготовленных из стекол с различными показателями преломления. Благодаря высокому качеству изображения, объектив «Тессар» получил широкое распространение в мире и используется до настоящего времени. По этой схеме построен ряд отечественных объективов «Индустар». На рис. 2.1.(а) схематически показано сечение объектива меридиональной плоскостью и ход пучка лучей, параллельных его оптической оси. А на рис. 2.1.(б) представлена идеальная оптическая система эквивалентная этому объективу.

Поверхности с вершинами в точках  $O$  и  $O'$  соответствуют первой и последней поверхностям оптической системы, точки  $F$ ,  $F'$ ,  $H$  и  $H'$  носят название *кардинальных точек оптической системы* и используются для расчета хода лучей. Более подробно свойства идеальных оптических систем и их кардинальных точек будут рассмотрены нами в следующих разделах.

## **2.2. Идеальная оптическая система**

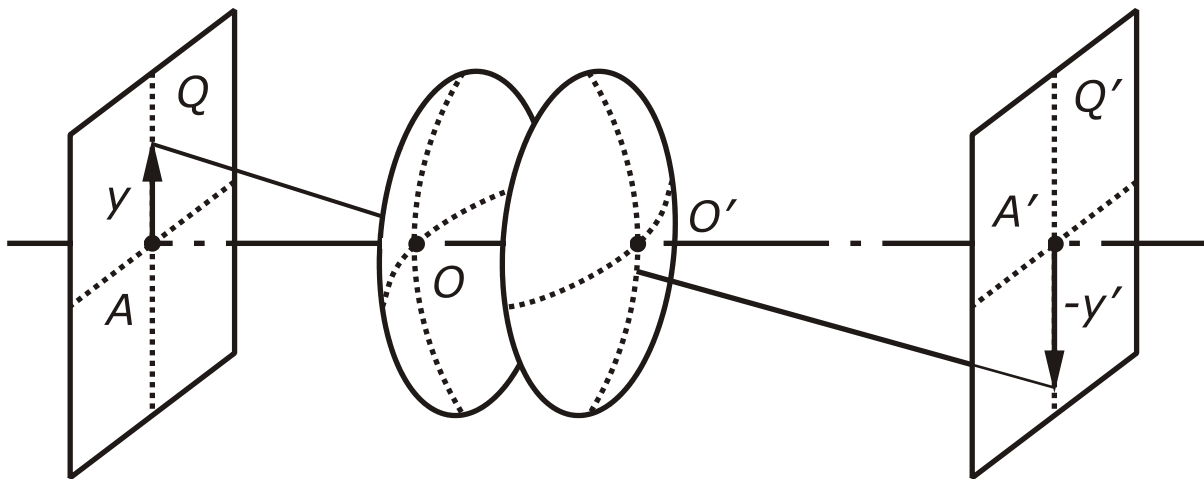
Идеальной оптической системой называют такую систему, которая любую точку пространства отображает стигматически, т.е. идеальная система не нарушает гомоцентричности прошедших через нее сколь угодно широких пучков лучей в пределах неограниченно большой области пространства.

Теория идеальной оптической системы базируется на следующих положениях.

- 1. Каждой точке пространства предметов соответствует только одна точка в пространстве изображений. Такие две точки называются сопряженными.**
- 2. Каждой прямой линии пространства предметов соответствует только одна сопряженная с ней линия в пространстве изображений.**
- 3. Если какая-либо точка в пространстве предметов лежит на прямой, то сопряженная с ней точка в пространстве изображений лежит на прямой, сопряженной с первой.**
- 4. Всякой плоскости пространства предметов соответствует только одна сопряженная плоскость пространства изображений.**

Четвертое положение является следствием первых трех, так как две пересекающиеся прямые линии однозначно определяют положение плоскости в пространстве.

Теорию идеальной оптической системы мы будем рассматривать применительно к центрированным системам. Центрированная система симметрична относительно оптической оси. Поэтому все явления, связанные с прохождением света через такую систему, тоже подчиняются законам симметрии.

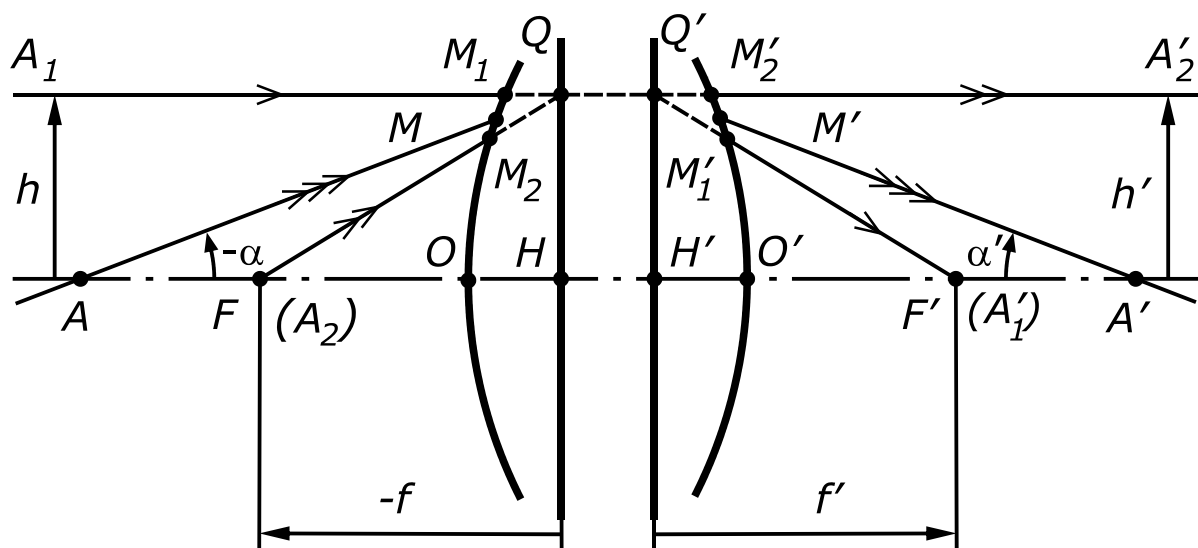


**Рис. 2.2.** Линейное увеличение оптической системы.

Центрированные оптические системы обладают следующими общими свойствами:

- 1. Если луч в пространстве предметов лежит в меридиональной плоскости, то он останется в этой плоскости и после прохождения через оптическую систему. Отсюда следует, что всякая меридиональная плоскость сопряжена сама с собой.**
- 2. Если меридиональная плоскость в пространстве предметов будет повернута на некоторый угол вокруг оптической оси, то и в пространстве предметов меридиональная плоскость повернется вокруг оптической оси на тот же угол и в ту же сторону.**
- 3. Плоскости, перпендикулярной оптической оси в пространстве предметов, соответствует плоскость в пространстве изображений, также перпендикулярная оптической оси.**

Общая теория идеальной оптической системы является частным случаем более общей геометрической задачи о преобразовании одного пространства в другое, которое называется коллинеарным преобразованием. Введение понятия идеальной оптической системы позволяет получить теоремы, инварианты, формулы, необходимые при расчете оптических систем и при решении целого ряда других очень важных задач прикладной оптики.



**Рис.2.3.** Кардинальные точки оптической системы.

### **2.3. Линейное увеличение. Кардинальные точки оптической системы. Главные плоскости. Фокусные расстояния**

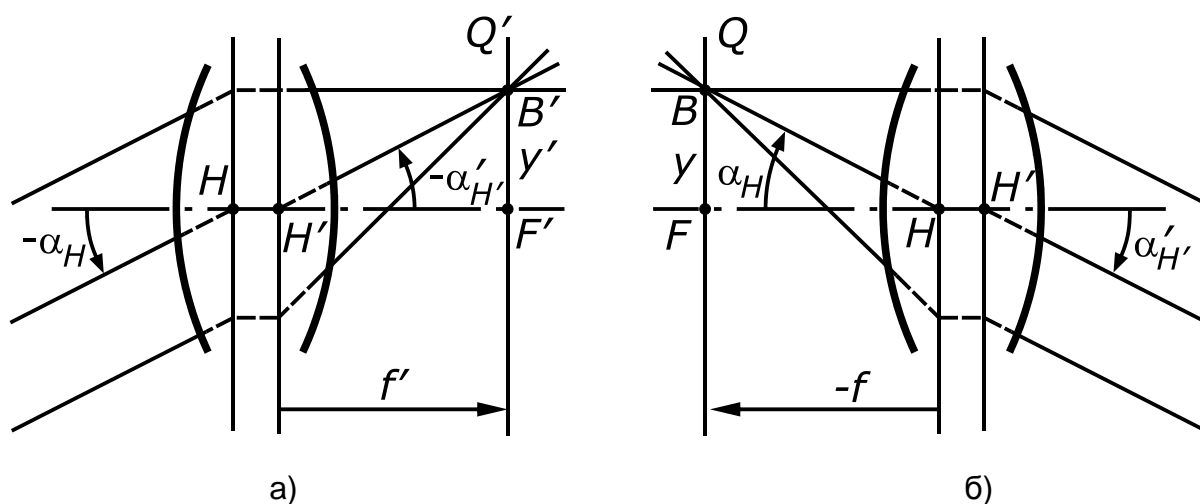
На рис. 2.2. изображена пара сопряженных плоскостей  $Q$  и  $Q'$ , перпендикулярных оптической оси  $OO'$ . Осевые точки  $A$  и  $A'$  этих плоскостей также взаимно сопряженные, так как они лежат на пересечении сопряженных элементов. В плоскости  $Q$  возьмем предмет в виде линейного отрезка  $Y$ , его изображением будет сопряженный с ним отрезок  $y'$  в плоскости  $Q'$ .

Согласно принятому правилу знаков на рис. 2.2. отрезок  $y$  – положительный, а отрезок  $y'$  – отрицательный. Отношение размера изображения к размеру предмета называется **линейным увеличением**  $\beta$  идеальной системы:

$$\beta = \frac{y'}{y}. \quad (2.1)$$

Если  $\beta < 0$ , то изображение по отношению к предмету будет перевернутым, при  $\beta > 0$  – изображение прямое. В идеальной системе для одной пары сопряженных плоскостей, перпендикулярных оптической оси, линейное увеличение является величиной постоянной и не зависит от размеров предмета.

Для других пар сопряженных плоскостей линейное увеличение имеет другое значение.



**Рис. 2.4.** Свойства фокальных плоскостей

Следствием постоянства линейного увеличения в сопряженных плоскостях является геометрическое подобие изображения предмету. Перейдем к определению кардинальных (основных) точек оптической системы. На рис. 2.3 изображена первая и последняя поверхности центрированной оптической системы, состоящей из сферических поверхностей. Ось  $OO'$  – оптическая ось, точки  $A$  и  $A'$  – соответственно осевые точки предмета и изображения. В пространстве предметов из точки  $A$  выходит луч  $AM$ , сопряженный с ним луч в пространстве изображений  $M'A'$  пройдет через точку  $A'$ . При передвижении точки  $A$  вдоль оптической оси налево, угол  $\alpha$  будет уменьшаться и, когда точка  $A$  удалится в бесконечность, угол  $\alpha$  станет равным нулю, т.е. луч пойдет параллельно оптической оси. При перемещении точки  $A$  предмета будет перемещаться вдоль оптической оси и точка  $A'$ , которая займет положение  $F'$ , когда точка  $A$  уйдет в бесконечность. Точка  $F'$  на оптической оси в пространстве изображений, сопряженная с бесконечно удаленной точкой, расположенной на продолжении оптической оси в пространстве предметов, называется **задним фокусом** оптической системы. Всякий луч (например,  $A_1M_1$ ), идущий в пространстве предметов параллельно оптической оси, по выходе из системы должен пройти через точку  $F'$  (луч  $M_1'A_1'$ ). Плоскость, перпендикулярная к оптической оси и проходящая через точку  $F'$ , называется **задней фокальной плоскостью**. Она сопряжена с бесконечно удаленной плоскостью пространства предметов.

При движении точки  $A$  вправо, точка  $A'$  будет перемещаться также вправо. Угол  $\alpha'$  станет уменьшаться и обратится в нуль, когда точка  $A'$  удалится в бесконечность. В этом случае точка  $A$  переместится в точку  $F$ . Точка  $F$  на оптической оси в пространстве предметов, сопряженная с бесконечно удаленной точкой, расположенной на продолжении оптической оси в пространстве изображений, называется **передним фокусом оптической системы**.

Все лучи, вышедшие из точки  $F$ , пройдя через систему, образуют пучок лучей, параллельных оптической оси (например, луч  $M'_2A'_2$ ). Луч  $M'_2A'_2$  сопряжен с лучом  $A_2M_2$ , проходящим через точку  $F$ . Плоскость, перпендикулярная к оптической оси и проходящая через точку  $F$ , называется **передней фокальной плоскостью**. Эта плоскость сопряжена с бесконечно удаленной плоскостью пространства изображений. Из выше изложенного следует важное свойство фокальных плоскостей. Гомоцентрическому пучку лучей с вершиной в любой точке  $B'$  задней фокальной плоскости  $Q'$  соответствует пучок параллельных между собой лучей в пространстве предметов (рис. 2.4.(а)).

То же самое можно сказать и о передней фокальной плоскости: гомоцентрическому пучку лучей с вершиной в любой точке  $B$  передней фокальной плоскости  $Q$  соответствует пучок параллельных между собой лучей в пространстве изображений (рис. 2.4.(б)).

Пусть луч  $A_1M_1$ , в пространстве предметов входит в оптическую систему параллельно оптической оси на некотором расстоянии  $h$  от нее (рис. 2.3.). Тогда сопряженный с ним луч в пространстве изображений  $M'_1A'_1$  пройдет через задний фокус оптической системы  $F'$ . Пусть также через передний фокус  $F$  оптической системы проходит луч  $A_2M_2$ . Причем луч  $A_2M_2$  направлен таким образом, что сопряженный с ним луч в пространстве изображений луч  $M'_2A'_2$  проходит параллельно оптической оси на расстоянии  $h' = h$ . *(Мы всегда можем выбрать такие пары сопряженных лучей для идеальной оптической системы, так как она не нарушает гомоцентричности прошедших через нее сколь угодно широких пучков лучей в пределах неограниченно большой области пространства. А из определения переднего фокуса оптической системы следует, что гомоцентрический пучок лучей с центром в переднем фокусе сопряжен с пучком лучей, параллельных оптической оси в пространстве изображений. Аналогично,*



из определения заднего фокуса следует, что пучок лучей, параллельных оптической оси в пространстве предметов, сопряжен с гомоцентрическим пучком лучей с центром в заднем фокусе.)

Продолжим лучи  $A_1M_1$  и  $A_2M_2$  и найдем в пространстве предметов точку их пересечения  $Q$ . Продолжения лучей выполнено штриховыми линиями, так как в действительности этих участков хода лучей не существует. Аналогично, найдем точку  $Q'$  пересечения лучей  $A'_1M'_1$  и  $A'_2M'_2$  в пространстве изображений. Точка  $Q'$  пересечения лучей  $A'_2M'_2$  и  $A'_1M'_1$  является изображением точки  $Q$  пересечения сопряженных с ними лучей  $A_2M_2$  и  $A_1M_1$ . Если из точек  $Q$  и  $Q'$  опустить перпендикуляры  $QH$  и  $Q'H'$  на оптическую ось, и провести через эти же точки плоскости, перпендикулярные оптической оси, то, в силу симметрии оптической системы, как перпендикуляры, так и плоскости будут сопряженными. Кроме того, так как по построению  $h = h'$ , то  $QH = Q'H'$ . Следовательно, плоскости  $QH$  и  $Q'H'$  будут сопряжены с линейным увеличением,  $\beta_H = 1$ . Перпендикулярные к оптической оси сопряженные плоскости, линейное увеличение в которых равно **плюс единице**, называются **главными плоскостями оптической системы**.

Плоскость  $QH$  называют **передней главной плоскостью**, а плоскость  $Q'H'$  – **задней главной плоскостью** оптической системы. Точки пересечения главных плоскостей с оптической осью называют **передней  $H$  и задней  $H'$  главными точками** системы.

Главные точки – сопряженные между собой точки, так как они являются пересечением оптической оси с главными плоскостями. Расстояние  $HF$  от передней главной точки  $H$  до переднего фокуса  $F$  называют **передним фокусным расстоянием** оптической системы, а расстояние  $H'F'$  от задней главной точки  $H'$  до заднего фокуса  $F'$  – **задним фокусным расстоянием**. Фокусные расстояния обозначают соответственно через  $f$  и  $f'$ . За начало отсчета фокусных расстояний принимают главные точки. На рис.2.3. переднее фокусное расстояние  $f$  – отрицательное, а заднее  $f'$  – положительное. Расстояние  $OF$  от вершины передней поверхности до переднего фокуса называется **передним фокальным отрезком**, а расстояние  $O'F'$  от вершины задней поверхности до заднего фокуса – **задним фокальным отрезком**. Обозначают фокальные отрезки соответственно  $S_F$  и  $S'_{F'}$ . Главные

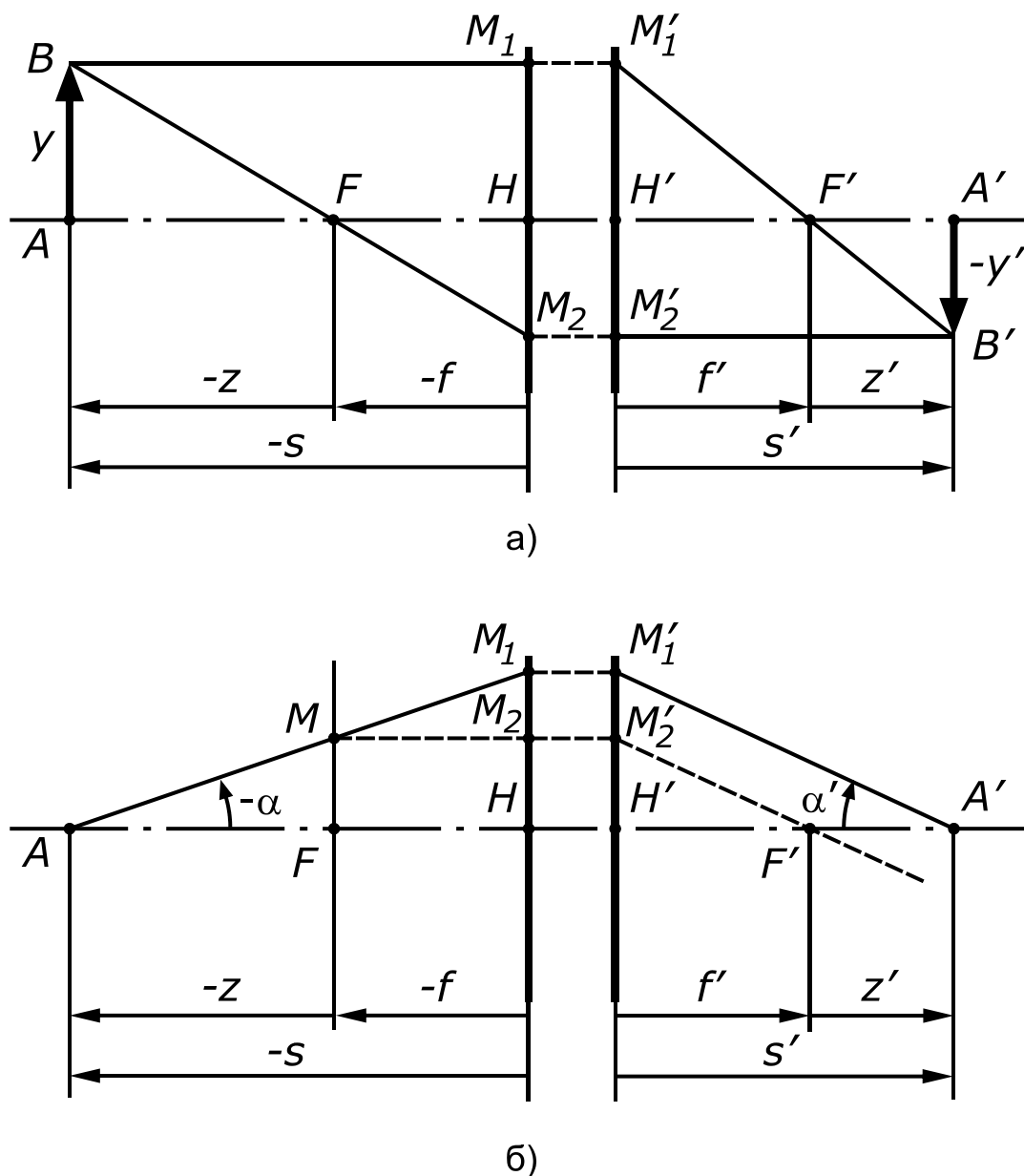
точки и точки фокусов носят название **кардинальных** (основных) точек оптической системы.

## **2.4. Графическое построение изображений**

Зная положение главных точек и фокусов оптической системы, можно графически построить изображение предмета и определить положение точки, сопряженной с заданной. Наиболее просто построение выполняется при помощи лучей, ход которых после преломления в оптической системе заранее известен. К таким лучам относятся: 1) луч, идущий параллельно оптической оси; 2) наклонный луч, проходящий через передний фокус; 3) наклонный луч, проведенный через переднюю главную точку. В пространстве изображений сопряженными с этими лучами будут: с первым лучом – луч, идущий через задний фокус; со вторым – луч, параллельный оптической оси; с третьим – луч, проведенный через заднюю главную точку.

Для построения изображения отрезка, перпендикулярного оптической оси с началом в точке  $A$  на ней, достаточно найти изображение только одной его крайней точки, расположенной вне оптической оси. Опустив из полученной точки изображения перпендикуляр на оптическую ось, получаем изображение всего отрезка.

На рис. 2.5 (а) показано построение изображения отрезка  $AB = y$ , заданного в пространстве предметов и перпендикулярного к оптической оси. Из точки  $B$  проводят два луча, один из которых параллелен оптической оси, а второй проходит через передний фокус  $F$ . Первый луч  $BM_1$  встретит переднюю главную плоскость  $H$  в точке  $M_1$ , сопряженный с ним луч пойдет через задний главный фокус  $F'$  и точку  $M'_1$  на задней главной плоскости  $H'$ , причем  $HM_1 = H'M'_1$ , так как линейное увеличение в главных плоскостях равно единице. Вторым луч  $BF$  пересечет переднюю главную плоскость  $H$  в точке  $M_2$ ; сопряженный с ним луч в пространстве изображений должен пройти через точку  $M'_2$  (причем  $HM_2 = H'M'_2$ ) и выйти параллельно оптической оси. Точка пересечения построенных в пространстве изображений лучей является точкой изображения  $B'$  крайней точки предмета  $B$ . Опуская из точки  $B'$  перпендикуляр на оптическую ось, получаем точку  $A'$ , которая явля-



**Рис. 2.5.** Графическое построение изображений отрезка (а) и точки(б).

ется изображением точки  $A$ , следовательно, отрезок  $A'B' = -y'$  является изображением предмета  $AB = y$ .

Показанный на рис. 2.5 (а) способ построения изображения произвольной точки, расположенной вне оптической оси системы. Графическое построение изображения точки  $A$ , расположенной на оптической оси, можно выполнить, используя свойство фокальных плоскостей. На рис 2.5 (б) выполнено такое построение. Из точки  $A$  проводят луч  $AM_1$  под углом  $\alpha$  к оптической оси, а через точку  $F$  перпендикуляр к оптической оси до пересечения с лучом  $AM_1$ . Через точку пересечения  $M$

проводят луч  $MM_2$ , параллельный оптической оси, который встретит переднюю и заднюю главные плоскости соответственно в точках  $M_2$  и  $M'_2$ . Луч, сопряженный с лучом  $MM_2$ , в пространстве изображений должен пройти через задний фокус  $F'$ . Так как точка  $M$  лежит в передней фокальной плоскости, то сопряженная с ней точка – точка изображения – должна находиться в бесконечности. Поэтому для построения луча, сопряженного с лучом  $MM_1$ , а, следовательно, и лучом  $AM_1$ , из точки  $M'_1$  проводят луч  $M'_1A'$ , параллельный  $M'_2F'$ . Пересечение луча  $M'_1A'$  с оптической осью даст точку  $A'$ , являющуюся изображением точки  $A$ . Этот способ используется также для построения луча, сопряженного с произвольным лучом в пространстве предметов.

## 2.5. Основные формулы идеальной оптической системы

Определим зависимость между расстояниями до сопряженных точек  $A$  и  $A'$  от соответствующих фокусов и фокусными расстояниями системы (рис. 2.5 (а)). Положение предметной точки  $A$  будем определять отрезком  $FA$  относительно переднего фокуса, а положение точки  $A'$  изображения – отрезком  $F'A'$  относительно заднего фокуса. Отрезок  $FA$ , согласно правилу знаков, отрицательный, отрезок  $F'A'$  – положительный. Введем следующие обозначения:  $FA = -z$ ,  $F'A' = z'$ . Так как по построению  $HM_2 = A'B' = -y'$ ,  $H'M'_1 = AB = y$ , то из подобия треугольников  $ABF$  и  $FHM_2$  находим:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{-f}{-z} \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z}. \quad (2.2)$$

Аналогично, из другой пары подобных треугольников  $H'M'_1F'$  и  $F'A'B'$  следует:

$$\frac{-y'}{y} = \frac{z'}{f'} \quad \text{или} \quad \frac{y'}{y} = -\frac{z'}{f'}. \quad (2.3)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.2) и (2.3), получаем

$$zz' = ff' \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) называется **формулой Ньютона**. При  $-f = f'$  формула (2.4) примет вид

$$zz' = -f'^2 \quad (2.5)$$

Из выражений (2.2) и (2.3) получим формулу линейного увеличения идеальной оптической системы

$$\beta = \frac{y'}{y} = -\frac{f}{z} = -\frac{z'}{f'}. \quad (2.6)$$

Положение сопряженных точек  $A$  и  $A'$  можно также определять относительно главных плоскостей, т. е. отрезками  $HA$  и  $H'A'$ . Начало отрезков лежит в точках  $H$  и  $H'$ , поэтому отрезок  $HA$  – отрицательный, а  $H'A'$  – положительный.

Введем обозначения  $HA = -s$ ;  $H'A' = s'$ . Из рис. 2.5(а), с учетом знаков находим:

$$\left. \begin{aligned} z &= s - f \\ z' &= s' - f' \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Подставляя эти значения  $z$  и  $z'$  в формулу Ньютона, после упрощения будем иметь  $f's + fs' = ss'$ . Разделив обе части на  $ss'$ , получим **формулу Гаусса**, или **формулу отрезков**:

$$\frac{f'}{s'} + \frac{f}{s} = 1. \quad (2.8)$$

Если  $-f = f'$ , то формула (2.7) принимает вид

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}. \quad (2.9)$$

Линейное увеличение системы можно выразить через отрезки  $s$  и  $s'$ . Из выражений (2.7) следует:

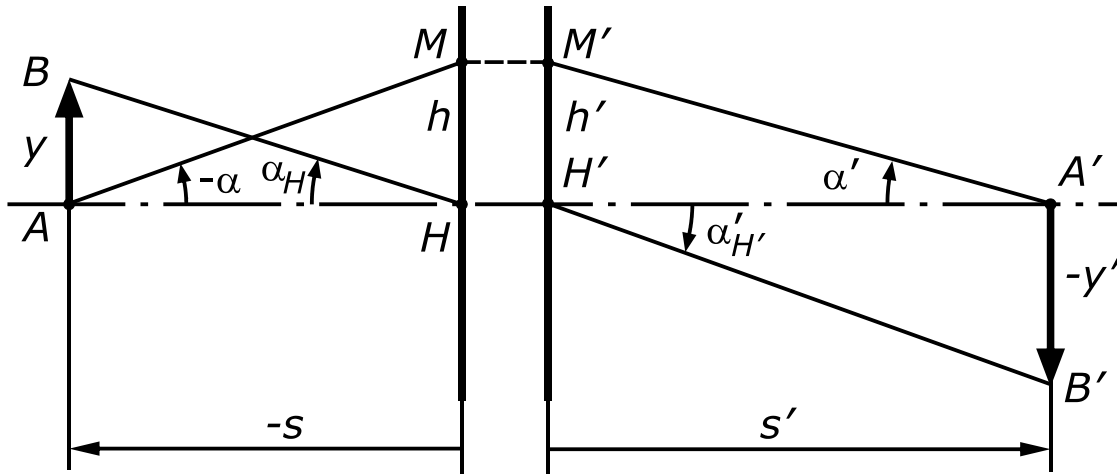
$$\frac{s'}{s} = \frac{f' + z'}{f + z} \quad (2.10)$$

Подставим в (2.10) значение  $z'$ , найденное из (2.4):

$$\frac{s'}{s} = \frac{f'z + ff'}{z(f + z)} = \frac{f'(z + f)}{z(f + z)} = \frac{f'}{z}.$$

Из формулы Ньютона следует  $\frac{f'}{z} = \frac{z'}{f}$ , поэтому

$$\frac{s'}{s} = \frac{f'}{z} = \frac{z'}{f} \quad (2.11)$$



**Рис. 2.6.** Угловое увеличение идеальной оптической системы.

Соотношение (2.11) позволяет получить выражение для линейного увеличения через отрезки  $s$  и  $s'$ . Из (2.6)  $\beta = -\frac{f}{z}$  ;

умножим числитель и знаменатель на  $f'$ , в результате получим

$$\beta = -\frac{ff'}{zf'}$$

Но согласно (2.11)  $\frac{s'}{s} = \frac{f'}{f}$ , следовательно,

$$\beta = -\frac{f}{f'} \frac{s'}{s} \quad (2.12)$$

При  $f = -f'$  линейное увеличение системы определяется соотношением  $\beta = -\frac{s'}{s}$ .

### **Уравнение Лагранжа – Гельмгольца**

На рис. 2.6 показан произвольный луч  $AM$ , вышедший из точки  $A$  под углом  $\alpha$  к оптической оси. Сопряженный с ним луч  $M'A'$  образует с оптической осью угол  $\alpha'$ . Из рассмотрения треугольников  $AMH$  и  $A'M'H'$  находим:  $h = s \operatorname{tg} \alpha = s' \operatorname{tg} \alpha'$ . Заменив  $s$  и  $s'$  их значениями из формул (2.7), получим

$$(z + f) \operatorname{tg} \alpha = (z' + f') \operatorname{tg} \alpha' \quad (2.13)$$

Подставим значения  $z$  и  $z'$ , найденные из (2.6) в (2.13). После упрощения будем иметь:

$$yf \operatorname{tg} \alpha = -y'f' \operatorname{tg} \alpha' \quad (2.14)$$

Выражение (2.14) носит название **формулы или уравнения Лагранжа – Гельмгольца**.

## 2.6. Угловое и продольное увеличение оптической системы. Их связь с линейным увеличением. Узловые точки

**Угловым увеличением** идеальной оптической системы называется отношение тангенсов углов, образованных сопряженными лучами с оптической осью (рис. 2.6):

$$\gamma = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (2.15)$$

Из рис. 2.6 следует:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{s} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{h}{s'}.$$

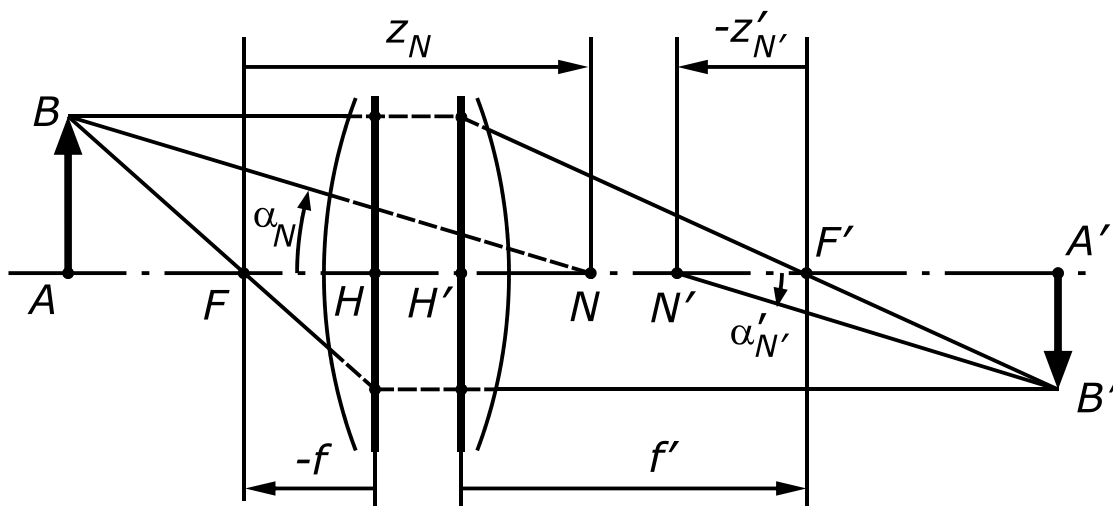
Подставляя значения  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha'$  в формулу (2.15), и принимая во внимание (2.11), получим:

$$\gamma = \frac{s}{s'} = \frac{z}{f'} = \frac{f}{z'} \quad (2.16)$$

Воспользовавшись соотношениями (2.12) и (2.16), и получим зависимость между угловым и линейным увеличениями:

$$\gamma = -\frac{f}{f'} \frac{1}{\beta} \quad \text{или} \quad \gamma\beta = -\frac{f}{f'} \quad (2.17)$$

В частном случае, когда  $-f = f'$ , формула (2.17) имеет вид  $\gamma\beta = 1$ . Формула (2.17) позволяет определить угловое увеличение в главных плоскостях. Так как линейное увеличение в главных плоскостях  $\beta_H = +1$ , то  $\gamma_H = -\frac{f}{f'}$ . Это означает, что луч, идущий из точки  $B$



**Рис. 2.7.** Узловые точки идеальной оптической системы.

в точку  $H$  (рис. 2.6) под углом  $\alpha_H$  к оптической оси, после преломления должен пройти через главную точку  $H'$  и выйти из системы под углом  $\alpha'_{H'}$ , не равным углу  $\alpha_H$ , так как  $\operatorname{tg} \alpha'_{H'} = -\frac{f}{f'} \operatorname{tg} \alpha_H$ . Только в частном случае, при  $-f = f'$  углы  $\alpha'_{H'}$  и  $\alpha_H$  будут равны. Найдем такие сопряженные точки  $N$  и  $N'$  и плоскости (рис. 2.7), для которых угловое увеличение равно плюс единице. Если  $\gamma = 1$ , то из (2.16) следует, что  $z_N = f'$  и  $z'_{N'} = f$ . Точки на оптической оси, для которых угловое увеличение равно единице, называются **узловыми точками** оптической системы. Передняя узловая точка  $N$  находится от переднего фокуса  $F$  на расстоянии, равном заднему фокусному расстоянию системы, а задняя узловая точка  $N'$  удалена от заднего фокуса  $F'$  на расстояние, равное переднему фокусному расстоянию. Так как  $\gamma_N = +1$ , то  $\operatorname{tg} \alpha'_{N'} = \operatorname{tg} \alpha_N$  и  $\alpha'_{N'} = \alpha_N$ . Следовательно, сопряженные лучи, проходящие через узловые точки, параллельны друг другу.

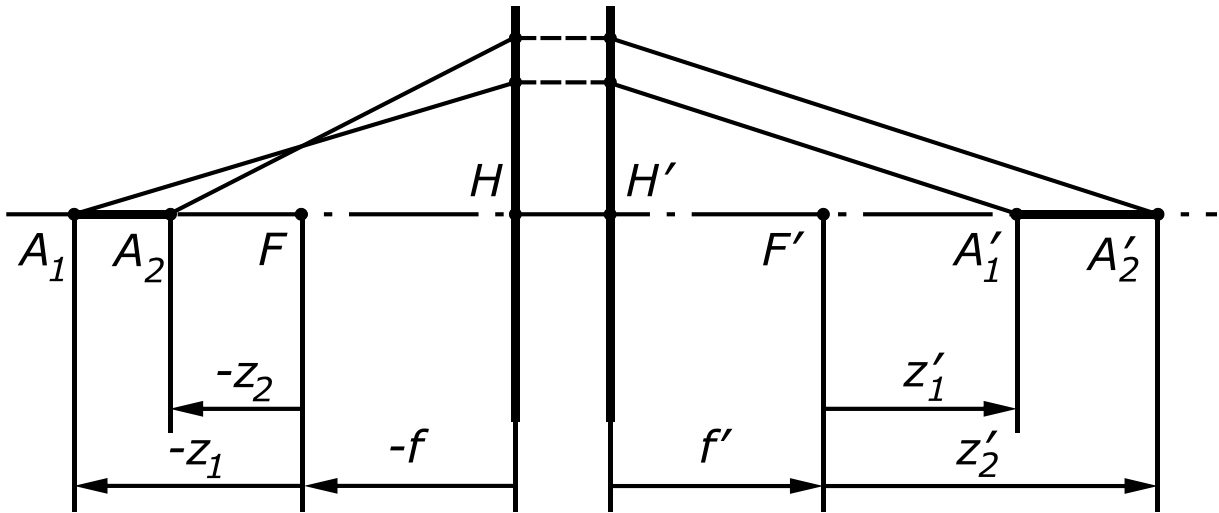
Из рис. 2.7. с учетом знаков найдем отрезки  $HN$  и  $H'N'$ :

$$HN = z_N + f = f' + f;$$

$$H'N' = f' + z'_{N'} = f' + f.$$

Перейдем к определению **продольного увеличения**. На рис. 2.8. даны две пары сопряженных точек,  $A_1$  и  $A_2$ ,  $A'_1$  и  $A'_2$ . Отрезки  $A_1A_2$





**Рис. 2.8.** Продольное увеличение идеальной оптической системы.

и  $A'_1A'_2$ , лежащие на оптической оси, также сопряжены друг с другом. Положения сопряженных точек относительно фокусов системы определяются отрезками  $z_1$ ;  $z'_1$  и  $z_2$ ;  $z'_2$ .

Следовательно,  $NH = H'N' = f + f'$ . Если  $-f = f'$ , то  $HN = 0$ . В частном случае узловые точки совпадают с главными точками.

Составим разности  $\Delta z = A_1A_2 = z_1 - z_2$  и  $\Delta z' = A'_1A'_2 = z'_1 - z'_2$ . Назовем продольным увеличением  $\alpha$  оптической системы отношение отрезков  $\Delta z'$  и  $\Delta z$ :

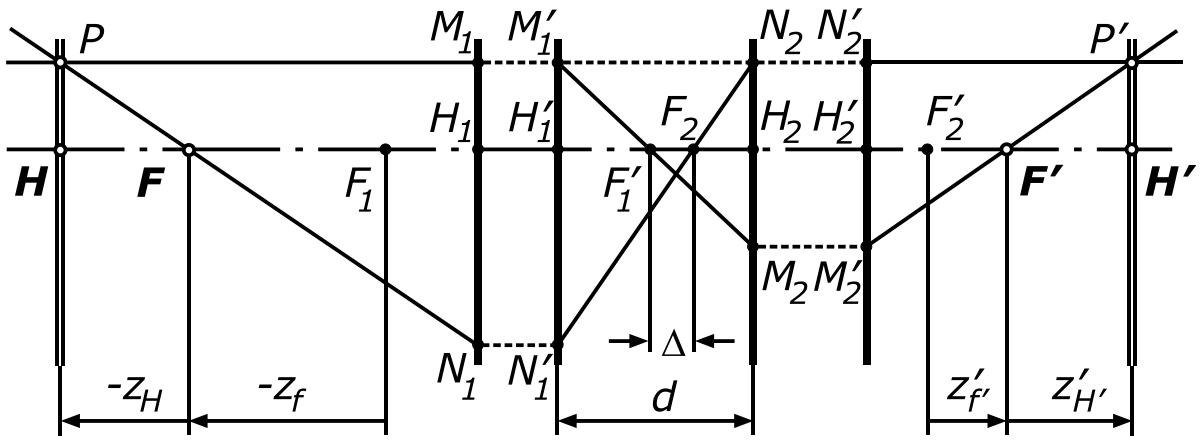
$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z}.$$

Пользуясь формулой Ньютона, выразим отрезки  $z'_1$  и  $z'_2$  через отрезки  $z_1$  и  $z_2$  и фокусные расстояния:

$$z'_1 = \frac{ff'}{z_1}; \quad z'_2 = \frac{ff'}{z_2};$$

тогда

$$\Delta z' = z'_1 - z'_2 = ff' \left( \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right) = \frac{ff'}{z_1 z_2} (z_1 - z_2).$$



**Рис. 2.9.** Идеальная оптическая система из двух компонентов

Следовательно,

$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = \frac{ff' \left( \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)}{z_1 z_2 \left( \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1} \right)} = - \frac{ff'}{z_1 z_2}.$$

Умножим числитель и знаменатель полученного выражения на  $f$ , в результате получим

$$\alpha = \frac{\Delta z'}{\Delta z} = - \frac{ff'}{z_1 z_2} \frac{f}{f},$$

но отношения  $\frac{f}{z_1}$  и  $\frac{f}{z_2}$  представляют собой линейные увеличения в парах сопряженных плоскостей перпендикулярных оптической оси и проходящих, соответственно, через сопряженные точки  $A_1, A'_1$  и  $A_2, A'_2$ . Тогда

$$\alpha = - \frac{f'}{f} \beta_1 \beta_2. \quad (2.18)$$

Представим себе, что точка  $A_2$  приближается к точке  $A_1$ , т.е.  $z_2$  стремится к  $z_1$ , тогда и точка  $A'_2$  будет приближаться к точке  $A'_1$  и  $z_2 \rightarrow z_1$ . В этом случае увеличение  $\beta_2$  будет стремиться к  $\beta_1$  и в предельном случае  $\beta_2$  станет равным  $\beta_1$ . Тогда формулу (2.18) можно написать:

$$\alpha = - \frac{f'}{f} \beta^2. \quad (2.19)$$

Если  $-f = f'$ , то из формул (2.17) и (2.18) находим

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma}. \quad (2.20)$$

Формула (2.20) связывает увеличения оптической системы всех трех видов.

## 2.7. Соединение двух оптических систем в одну с общей осью симметрии

Оптические системы обычно состоят из нескольких отдельных частей, заданных положением главных плоскостей и фокусов. Система, действие которой эквивалентно действию заданных простых систем с одной общей оптической осью, называется **эквивалентной оптической системой**. Чтобы найти эквивалентную оптическую систему, надо определить положение ее фокусов и главных плоскостей.

Рассмотрим оптическую систему, состоящую из двух простых систем. На рис. 2.9.  $F_1$  и  $F'_1$ ;  $H_1$  и  $H'_1$  – точки фокусов и главные точки первой системы;  $F_2$  и  $F'_2$ ;  $H_2$  и  $H'_2$  – точки фокусов и главные точки второй системы. Взаимное расположение двух систем задается расстоянием  $d$  между задней главной плоскостью первой системы и передней главной плоскостью второй системы. Иногда вместо расстояния  $d$  задают расстояние от заднего фокуса первой оптической системы до переднего фокуса второй системы, называемое **оптическим интервалом**  $\Delta$  (отрезок  $F'_1F_2$  на рис. 2.9). Оптический интервал считается положительным, если фокус  $F_2$  находится справа от фокуса  $F'_1$ , и отрицательным – при обратном расположении этих точек. Как следует из рис. 2.9,  $\Delta > 0$  и

$$F'_1F_2 = \Delta = d - f'_1 + f_2, \quad (2.21)$$

где  $f'_1$  и  $f_2$  – соответственно заднее фокусное расстояние первой системы и переднее фокусное расстояние второй системы.

Проведем произвольный луч  $PM_1$  параллельно оптической оси; он пересекает главные плоскости первой системы в точках  $M_1$  и  $M'_1$ , проходит через ее задний фокус  $F'_1$ , пересекает главные плоскости

второй системы в точках  $M_2$  и  $M'_2$ . Так как луч  $PM_1$  в пространстве предметов параллелен оптической оси, то, преломляясь внутри системы, он выйдет через точку  $F'$  – задний фокус эквивалентной системы (луч  $M'_2F'$ ). Продолжим луч  $M'_2F'$  до пересечения с направлением луча  $PM_1$ , получим точку  $P'$ . Плоскость  $P'H'$ , проведенная через точку  $P'$  перпендикулярно к оптической оси, является задней главной плоскостью эквивалентной системы.

Луч  $P'N'_2$ , идущий в последней среде по той же линии, что и луч  $PM_1$ , но в обратном направлении, проходит через передний фокус второй системы, через точки  $N'_1$  и  $N_1$  на главных плоскостях первой системы и выходит в первую среду по направлению  $N_1F$ . Так как луч  $P'N'_2$  входит в оптическую систему параллельно оптической оси, то луч, сопряженный с ним, после преломления внутри оптической системы должен пройти через передний фокус (точку  $F$ ) эквивалентной системы. По аналогии с точкой  $P'$  найдем точку  $P$ . Плоскость, проведенная через точку  $P$  перпендикулярно оптической оси, будет передней главной плоскостью эквивалентной оптической системы.

Пользуясь рис. 2.9, определим положение фокусов и величину фокусных расстояний эквивалентной системы. Положение заднего фокуса определяют по расстоянию от точки  $F'_2$ , которую принимают за начало отсчета, до точки  $F'$ . Обозначим отрезок  $F'_2F'$  через  $z'_{F'}$ . На рис. 2.9

$z'_{F'} > 0$ . Точки  $F'_1$  и  $F'$  являются сопряженными относительно второй системы, так как обе они сопряжены с точкой, находящейся в бесконечности в пространстве предметов. Применяя формулу Ньютона, можно найти отрезок  $F'_2F'$ , если вместо  $z$  подставить минус  $\Delta$  (расстояние до точки  $F'_1$  отсчитывается от точки  $F_2$ ), а вместо  $z'$  – отрезок  $z'_{F'}$ :

$$F'_2F' = z'_{F'} = \frac{f_2 f'_2}{-\Delta} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta}. \quad (2.22)$$

Положение переднего фокуса определяют по отрезку  $F_1F$ , который обозначим через  $z_F$ ; за начало отсчета этого отрезка принимаем точку  $F_1$ . На рис. 2.9  $z_F < 0$ . Точки  $F$  и  $F_2$  – сопряженные точки относительно первой системы, так как обе они сопряжены с точкой, находящейся в бесконечности в пространстве изображений. Применив фор-

малу Ньютона, найдем отрезок  $z_F$  по известному отрезку  $F'_1F_2 = \Delta$  (отрезок  $F'_1F_2$  отсчитывают от точки  $F'_1$ ):

$$F_1F = z_F = \frac{f_1f_1}{\Delta} \quad (2.23)$$

Определим фокусные расстояния  $f'$  и  $f$  эквивалентной системы. Из подобия треугольников  $P'H'F'$  и  $F'M'_2H'_2$  следует

$$\frac{P'H'}{-H'_2M'_2} = \frac{-f'}{f'_2 + z'_{F'}} \quad (2.24)$$

а из подобия треугольников  $H_2M_2F'_1$  и  $F'_1H'_1M'_1$  имеем

$$\frac{M'_1H'_1}{-H'_2M'_2} = \frac{f'_1}{\Delta - f_2} \quad (2.25)$$

Так как для главных плоскостей  $\beta_H = 1$ , то  $H'_2M'_2 = H_2M_2$ , и по построению  $P'H' = M'_1H'_1$ , то правые части выражений (2.24) и (2.25) можно приравнять. В результате получим

$$\frac{-f'}{f'_2 + z'_{F'}} = \frac{f'_1}{\Delta - f_2} \quad (2.26)$$

Подставим значение  $z'_{F'}$ , найденное из (2.22), в последнее выражение, окончательно получим

$$f' = -\frac{f'_1f'_2}{\Delta} \quad (2.26)$$

Путем аналогичных рассуждений соответствующих треугольников можно найти  $f$ . Так как треугольники  $PHF$  и  $FH_1N_1$  подобны, то

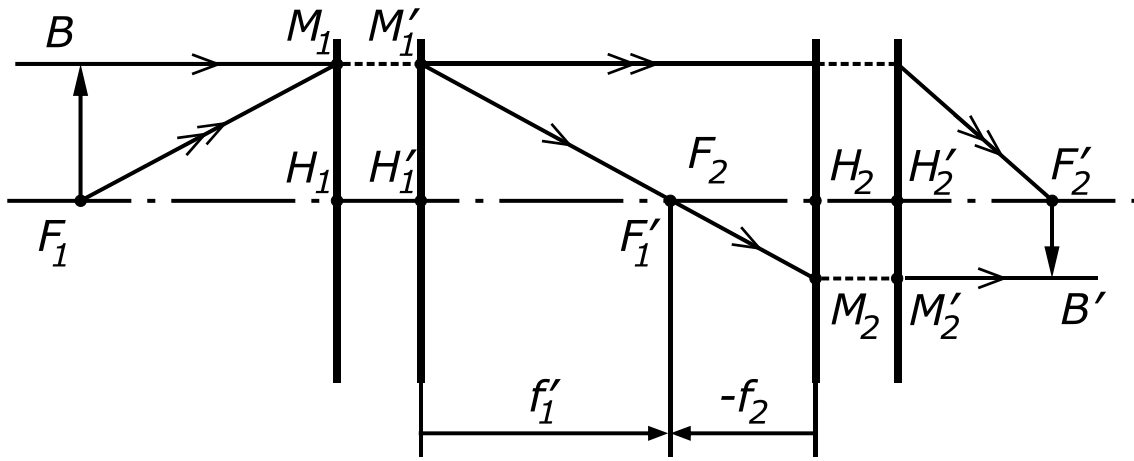
$$\frac{PH}{-H_1N_1} = \frac{-f}{-z_F - f_1} \quad (2.27)$$

Из подобия треугольников  $HN'_1F_2$  и  $F_2N_2H_2$  следует, что

$$\frac{N_2H_2}{-H'_1N'_1} = \frac{-f_2}{f'_1 - \Delta} \quad (2.30)$$

По построению  $PH = N_2H_2$  и  $H_1N_1 = H'_1N'_1$ , поэтому правые части двух последних выражений можно приравнять. После подстановки  $z_F$ , найденного из (2.23), окончательно получим

$$f = \frac{f_1f_2}{\Delta} \quad (2.27)$$



**Рис. 2.10.** Телескопическая система.

Если задано  $d$ , то  $\Delta$  находят из (2.21). При  $-f_1 = f'_1$  и  $-f_2 = f'_2$

$$f = -f' = \frac{f_1 f_2}{\Delta}.$$

Положение главных точек  $H$  и  $H'$  определяется относительно фокусов  $F_1$  и  $F'_2$  отрезками  $z_H$  и  $z'_{H'}$ . На рис. 2.9

$$z_H < 0; \quad z'_{H'} > 0; \quad -z_H = f - z_F; \quad z_H = z_F - f.$$

В выражение для  $z_H$  подставим значение  $z_F$  и  $f$  из формул (2.23) и (2.27):

$$z_H = \frac{f_1 f'_1}{\Delta} - \frac{f_1 f_2}{\Delta} = \frac{f_1 (f'_1 - f_2)}{\Delta}. \quad (2.28)$$

Отрезок  $z'_{H'} = z'_{F'} - f'$ ; значения  $f'$  и  $z'_{F'}$  подставим из формул (2.22) и (2.26), тогда

$$z'_{H'} = -\frac{f_2 f'_2}{\Delta} + \frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{f'_2 (f'_1 - f_2)}{\Delta}. \quad (2.29)$$

Линейное увеличение эквивалентной системы определяется формулой

$$\beta = \frac{f_1 f_2}{f_1 f'_1 - z_1 \Delta}.$$

Особый интерес представляют оптические системы, составленные из двух систем, оптический интервал которых  $\Delta$  равен нулю. В этом случае задний фокус первой системы совпадает с передним фокусом второй системы (рис. 2.10). При  $\Delta = 0$  по формулам (2.26) и (2.27) получаются бесконечно большие значения для обоих фокусных

расстояний эквивалентной системы. Как видно из формул (2.28) и (2.29), главные точки эквивалентной системы также лежат на бесконечно больших расстояниях:  $z_H = -\infty$  и  $z'_{H'} = \infty$ .

Системы, в которых оптический интервал равен нулю, называются **телескопическими** или **афокальными**. Формула (2.30) линейного увеличения для телескопической системы имеет вид:

$$\beta = \frac{f_2}{f'_1}. \quad (2.31)$$

Из формулы (2.31) следует, что линейное увеличение телескопической системы постоянно и не зависит от положения сопряженных плоскостей, так как координата  $z_1$ , характеризующая положение предмета относительно  $F_1$ , в формулу не входит. Как видно из рис. 2.10, в телескопической системе всякий луч, параллельный оптической оси в пространстве предметов, например, луч  $BM_1$ , выходит из системы параллельно оптической оси. Поэтому всякая точка, лежащая на линии  $BM_1$ , изображается сопряженной ей точкой, на линии  $M'_2B'$ , т.е. отношение расстояний от сопряженных точек до оптической оси одинаково для всех пар таких точек ( $\beta = \text{const}$ ).

### 3. Преломление и отражение лучей

#### 3.1. Преломление лучей сферической поверхностью

На рис. 3.1. линия  $AA'$  – оптическая ось некоторой центрированной системы, одна из преломляющих сферических поверхностей которой, с центром кривизны в точке  $C$ , обозначена дугой  $OM$ . Эта поверхность с радиусом кривизны  $r$  разделяет две оптические среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ . На сферическую поверхность из точки  $A$ , находящейся на расстоянии  $s$  от вершины поверхности, падает луч  $AM$  под конечным углом  $\sigma$  к оптической оси. Преломленный (отраженный) луч направится в точку  $A'$  под углом  $\sigma'$ . Точка  $A'$  является изображением точки  $A$ , так как она находится на пересечении двух лучей  $OA'$  и  $MA'$ , сопряженных с лучами  $AO$  и  $AM$ , на пересечении которых находится точка предмета  $A$ . Считая  $s$  и  $\sigma$  известными, найдем координаты  $s'$  и  $\sigma'$ , определяющие преломленный луч. Из треугольника  $AMC$  по теореме синусов находим

$$\sin \varepsilon = \frac{r - s}{r} \sin \sigma \quad (3.1)$$

Воспользовавшись законом преломления, получим

$$\sin \varepsilon' = \frac{n}{n'} \sin \varepsilon \quad (3.2)$$

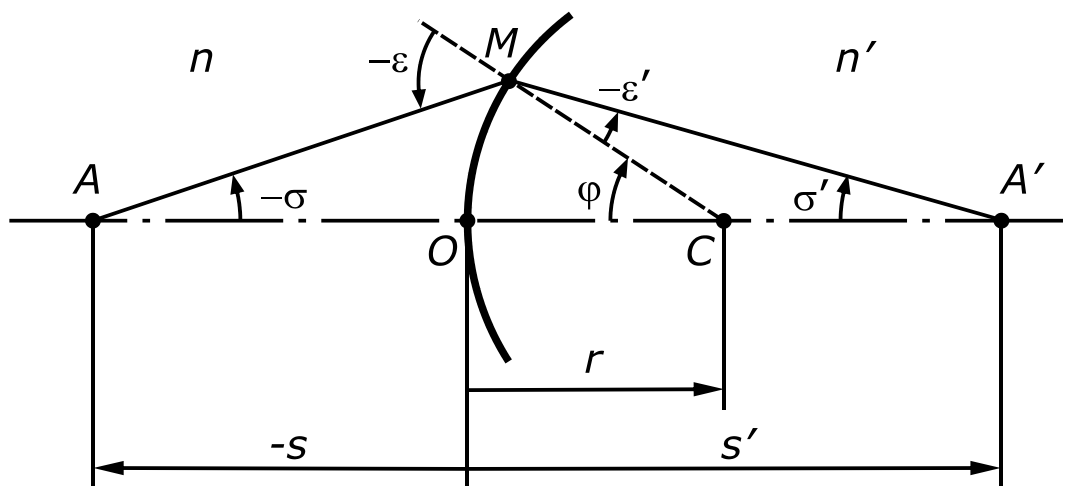
Угол  $\varepsilon$  является внешним углом треугольника  $AMC$ , поэтому  $-\varepsilon = \varphi - \sigma$  или  $\varphi = \sigma - \varepsilon$ . Но из треугольника  $MCA'$  внешний угол  $\varphi = -\varepsilon' + \sigma'$ . Приравняв правые части выражений для  $\varphi$ :  $\sigma - \varepsilon = -\varepsilon' + \sigma'$ , откуда

$$\sigma' = \sigma + \varepsilon' - \varepsilon. \quad (3.3)$$

Применяя теорему синусов, из треугольника  $MCA'$  находим

$$\frac{s' - r}{\sin(-\varepsilon')} = \frac{r}{\sin \sigma'}$$





**Рис. 3.1.** Преломление луча сферической поверхностью

или

$$\frac{r - s'}{\sin \varepsilon'} = \frac{r}{\sin \sigma'} ,$$

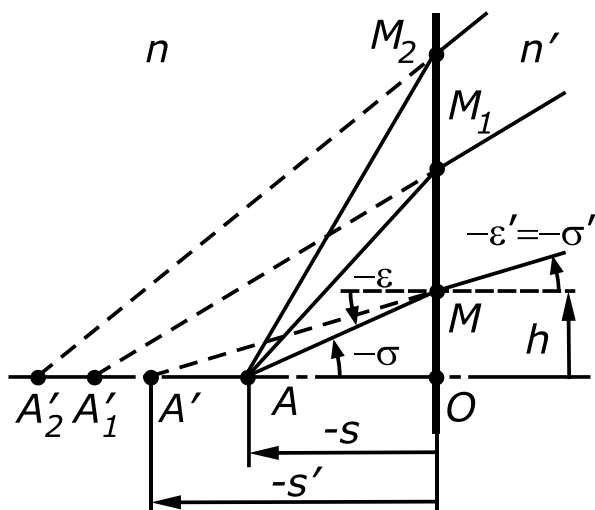
откуда

$$s' = r - r \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \sigma'} . \quad (3.4)$$

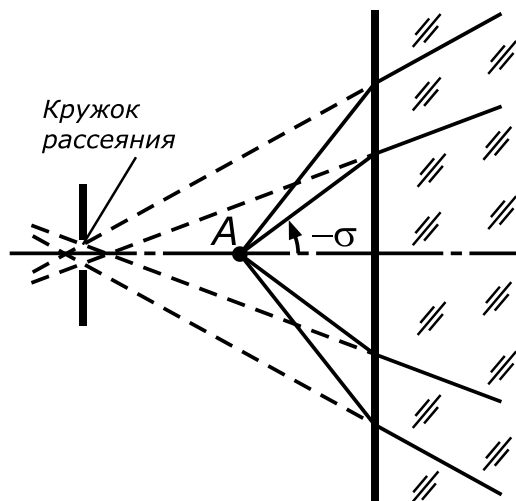
Последовательно применяя формулы (3.1) – (3.4), вычислим координаты преломленного луча – отрезок  $s'$  и угол  $\sigma'$ , что позволит найти изображение  $A'$  предметной точки  $A$ . Из формул (3.3) и (3.4) видно, что координата  $s'$  изменяется при изменении углов  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , то есть **гомоцентричность пучка после преломления на сферической поверхности нарушается**.

### **3.2. Преломление лучей плоской поверхностью и плоскопараллельной пластинкой**

В оптических приборах находят широкое применение детали с плоскими поверхностями: защитные стекла, зеркала, светофильтры, сетки, различного рода призмы и другие детали, которые оказывают влияние на ход гомоцентрических пучков лучей за исключением одного случая, когда параллельные пучки падают перпендикулярно к их плоской поверхности ( $\varepsilon = \varepsilon' = 0$ ). Рассмотрим случай преломления



**Рис. 3.2.** Преломление пучка лучей плоской поверхностью



**Рис. 3.3.** Изображение точки плоской поверхностью

лучей плоской поверхностью, разделяющей две среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$ , причем  $n < n'$  (рис. 3.2). Проследим ход двух лучей  $AO$  и  $AM$ , исходящих из точки  $A$ . Луч  $AO$ , падающий по нормали, пройдет через плоскую поверхность раздела без изменения направления. Луч  $AM$ , преломившись на границе раздела, пойдет по направлению  $MM'$ . Продолжение преломленного луча  $MM'$  пересекает нормаль к поверхности в точке  $A'$ , которая будет мнимым изображением точки  $A$ . Расстояние от точки  $A$  до плоской поверхности обозначим через  $s$ , а от точки  $A'$  до той же поверхности – через  $s'$ . Углы падающего и преломленного лучей с линией  $AO$  обозначим через  $\sigma$  и  $\sigma'$ .

Для плоской поверхности  $\varepsilon = \sigma$ , а  $\varepsilon' = \sigma'$ . Согласно принятому правилу знаков отрезки  $s$ ,  $s'$  и углы  $\sigma$  и  $\sigma'$  – отрицательны. Треугольники  $AMO$  и  $A'MO$  имеют общую высоту  $h$ . Из треугольника  $AMO$   $h = s \operatorname{tg} \sigma$ , а из треугольника  $A'MO$   $h = h = s' \operatorname{tg} \sigma'$ , откуда  $s' = s \frac{\operatorname{tg} \sigma}{\operatorname{tg} \sigma'}$  заме-

няя  $\operatorname{tg} \sigma$  и  $\operatorname{tg} \sigma'$  отношением  $\frac{\sin \sigma}{\cos \sigma}$ ;  $\frac{\sin \sigma'}{\cos \sigma'}$  и используя закон преломления, получаем

$$s' = s \frac{n' \sin \sigma' \cos \sigma'}{n \cos \sigma \sin \sigma'} = \frac{n' \cos \sigma'}{n \cos \sigma} \quad (3.5)$$

Из формулы (3.5.) следует, что при постоянном  $s$  значение  $s'$  будет различным для различных углов падения, так как отношение косинусов не является постоянной величиной в отличие от отношения

синусов. Следовательно, лучи широко расходящегося или сходящегося пучка лучей после преломления на плоской поверхности пересекут линию АО в разных точках, т. е. **гомоцентричность пучка после преломления на плоской поверхности нарушается**, а изображения точечного источника, даваемое плоской поверхностью, будет иметь вид **кружка рассеяния** (рис.3.3). Для малых углов  $\sigma$  ( $\sigma \rightarrow 0$ ) формула (3.5) принимает вид

$$s'_0 = s \frac{n'}{n}.$$

**Плоскопараллельной пластинкой** называется оптическая деталь, ограниченная двумя параллельными плоскостями.

Пластинки, в зависимости от их назначения, могут быть помещены как в параллельных, так и в сходящихся или расходящихся пучках лучей. В зависимости от того, в каких пучках установлена пластинка, влияние ее на качество изображения будет различным.

Рассмотрим ход лучей через стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной  $d$ , находящуюся в воздухе (наиболее распространенный случай применения). В этом случае  $n_1 = 1,0$ ;  $n_2 = n$ ;  $n_3 = 1,0$  (рис.3.4). Пусть на пластинку падает луч МА. После преломления в точках  $M_1$  и  $M_2$  на гранях пластинки этот луч выйдет по направлению  $M_2A'$ .

Углы падения и преломления в точке  $M_1$  обозначим через  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon'_1$ , те же углы в точке  $M_2$  – через  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon'_2$ . Применяя дважды закон преломления и учитывая, что пластинка находится в воздухе, получаем

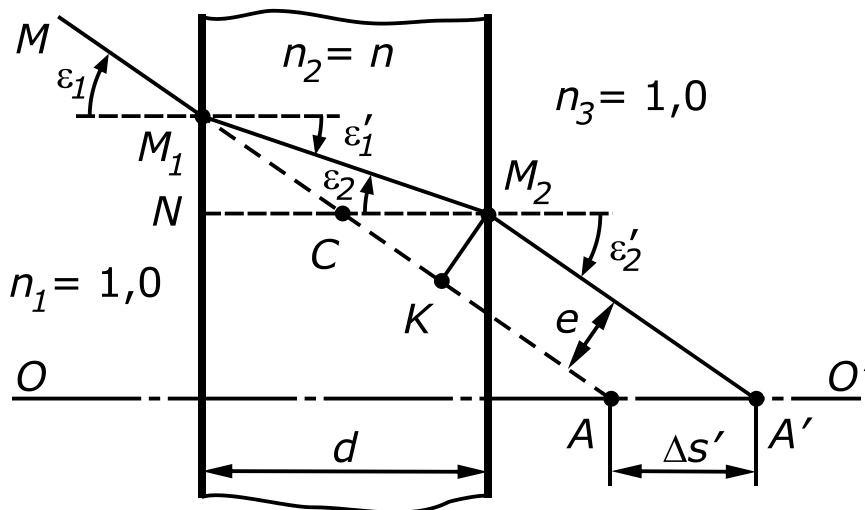
$$\sin \varepsilon_1 = n \sin \varepsilon'_1; \quad n \sin \varepsilon_2 = \sin \varepsilon'_2.$$

Так как  $\varepsilon'_1 = \varepsilon_2$  (углы при параллельных прямых), то, заменив  $\varepsilon'_1$  на  $\varepsilon_2$ , получим  $\sin \varepsilon_1 = n \sin \varepsilon_2$  или  $\sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon'_2$  откуда  $\varepsilon_1 = \varepsilon'_2$ . Вышедший из пластинки луч оказывается смещенным на величину  $e$  параллельно падающему лучу. Определим смещение  $e$ . Из треугольников  $M_1M_2K$  и  $M_1M_2N$  находим

$$e = M_1M_2 \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)$$

и

$$M_1M_2 = \frac{d}{\cos \varepsilon'_1}.$$



**Рис. 3.4.** Преломление луча плоскопараллельной пластинкой

Тогда

$$e = \frac{d \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon'_1)}{\cos \varepsilon'_1}. \quad (3.6)$$

Как видно из формулы (3.6), смещение луча  $e$  зависит от угла падения и тем больше, чем больше этот угол.

Смещение луча по оси  $OO'$ , называемое **продольным смещением**, определяет отрезок

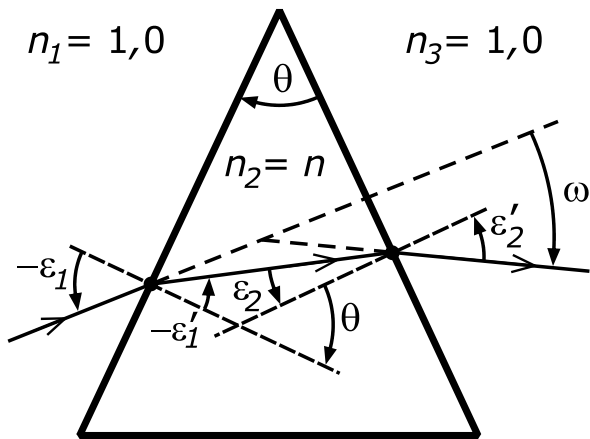
$$AA' = \Delta s' = CM_2 = d - NC = d - \frac{M_1N}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = d - \frac{d \operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}$$

или

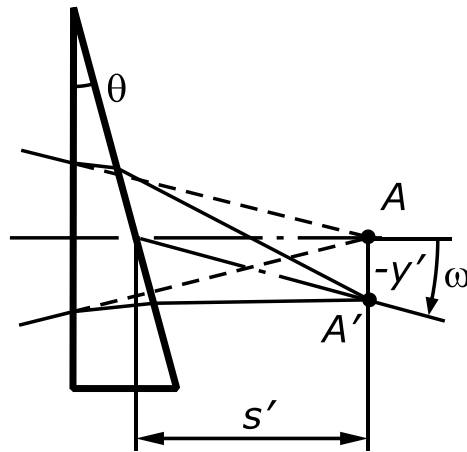
$$\Delta s' = d \left( 1 - \frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \right). \quad (3.7)$$

Следовательно, **гомоцентрический пучок лучей после преломления через плоскопараллельную пластинку перестает быть гомоцентрическим**, и изображение точки будет нерезким. При бесконечно малых углах падения луча формула (3.7) упрощается. Выразим отношение тангенсов через  $\sin$  и  $\cos$  и, заменив  $\sin \varepsilon_1$  на  $n \sin \varepsilon'_1$  получим

$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} = \frac{\sin \varepsilon'_1 \cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon'_1 n \sin \varepsilon'_1};$$



**Рис. 3.5.** Ход луча в преломляющей призме



**Рис. 3.6.** Смещение изображения клином

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  отношение  $\frac{\cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon'_1}$  будет стремиться к 1, тогда

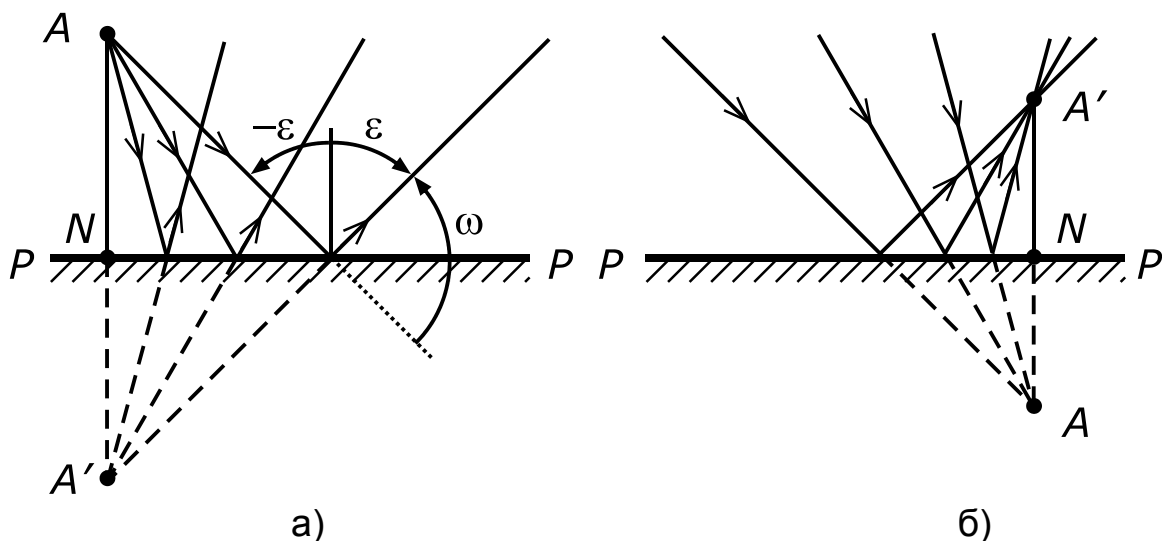
$$\frac{\operatorname{tg} \varepsilon'_1}{\operatorname{tg} \varepsilon_1} \rightarrow \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \Delta s'_0 = d \left( \frac{n-1}{n} \right). \quad (3.8)$$

### 3.3. Преломление лучей призмой. Оптический клин.

**Преломляющей призмой** называется оптическая деталь, ограниченная двумя преломляющими непараллельными плоскостями. Линия пересечения преломляющих плоскостей (ребро двугранного угла) называется **преломляющим ребром призмы**, а плоскость, перпендикулярная преломляющему ребру, – **главным сечением призмы**.

Преломляющая призма характеризуется **преломляющим углом**  $\theta$ , т.е. углом, между плоскостями призмы в ее главном сечении, и показателем преломления  $n$  материала, из которого она изготовлена. Угол призмы считается положительным, если его вершина направлена вверх.

Рассмотрим ход луча в главном сечении призмы (рис. 3.5). Пройдя через призму, луч отклонится от своего первоначального направления на угол  $\omega$ , называемый углом отклонения. Началом отсчета угла  $\omega$  является направление падающего луча. Предположим, что призма находится в воздухе, т.е.  $n_1 = n_3 = 1,0$ ;  $n_2 = n$ . Пользуясь законом преломления и учитывая геометрические соотношения, получим формулы для определения угла луча призмой:



**Рис. 3.7.** Изображение точки в плоском зеркале: а – мнимое, б – действительное.

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon'_1 &= \frac{1}{n} \sin \varepsilon_1; & \theta &= \varepsilon_2 - \varepsilon'_1; & \varepsilon_2 &= \theta + \varepsilon'_1; \\ \sin \varepsilon'_2 &= n \sin \varepsilon_2; & \omega &= -\varepsilon_1 + \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 - \varepsilon_2 = \varepsilon'_2 - \varepsilon_1 - \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Из формул (3.9) видно, что угол отклонения зависит от показателя преломления. Так как показатель преломления зависит от длины волны, то лучи разных длин волн отклоняются призмой на различные углы. Это свойство призм используется в спектральных приборах.

Преломляющая призма с малым преломляющим углом называется **оптическим клином**. В случае оптического клина при малом угле падения луча  $\varepsilon_1$  формулы (3.9) принимают вид

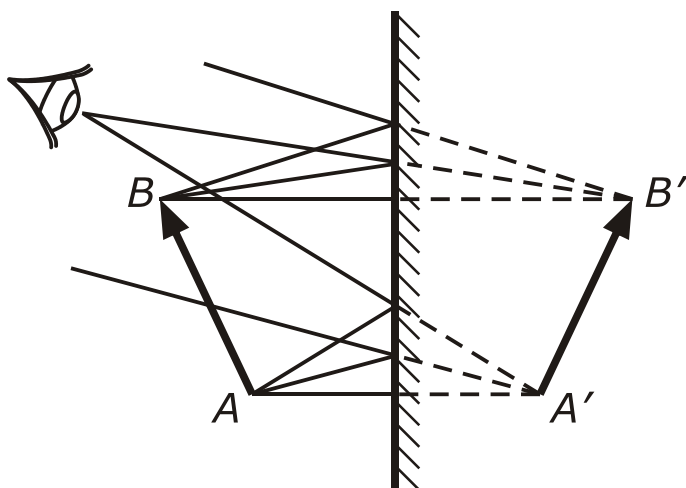
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'_1 &= \frac{\varepsilon_1}{n}; & \theta &= \varepsilon_2 - \varepsilon'_1; & \varepsilon_2 &= \theta + \varepsilon'_1; & \varepsilon'_2 &= n \varepsilon_2; \\ \omega &= n \varepsilon_2 - n \varepsilon'_1 - \theta = n(\varepsilon_2 - \varepsilon'_1) - \theta = n\theta - \theta. \end{aligned} \right\}$$

Итак,

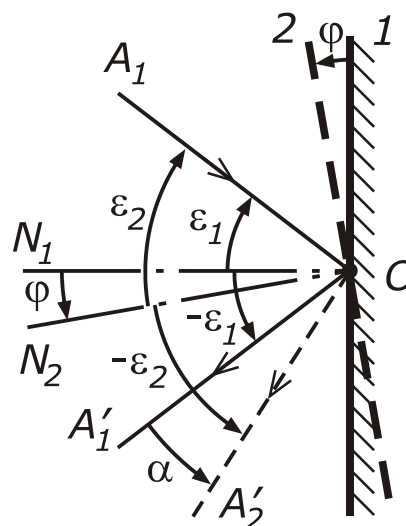
$$\omega = (n - 1)\theta. \quad (3.10)$$

Если на клин падает узкий гомоцентрический пучок лучей с центром в точке А (рис. 3.6), то после прохождения его через клин точка А сместится в положение А' на величину

$$y' = s' \omega = s'(n - 1)\theta. \quad (3.11)$$



**Рис. 3.8.** Изображение предмета в плоском зеркале

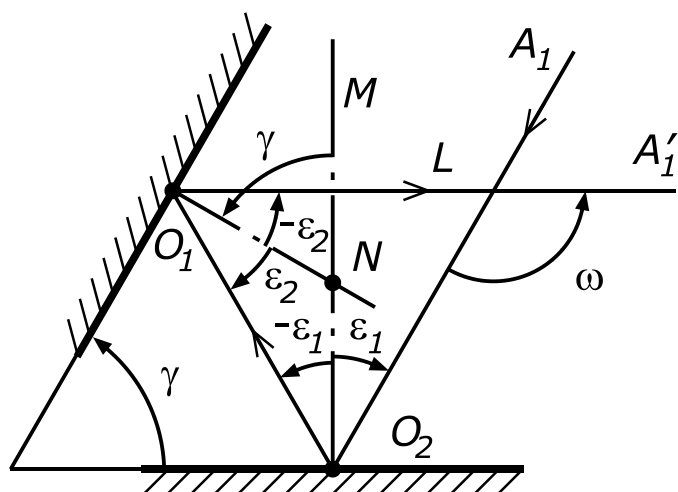


**Рис. 3.9.** Вращение плоского зеркала

### **3.4. Отражение лучей плоским зеркалом и системой из плоских зеркал**

Пусть на зеркало  $PP$  из точки  $A$  падает гомоцентрический пучок лучей (рис.3.7, а). После отражения эти лучи образуют снова гомоцентрический пучок лучей с центром в точке  $A'$ , лежащей на перпендикуляре  $AN$ , опущенном из точки  $A$  на плоскость зеркала, причем  $AN = NA'$ . Как видно из рисунка, отраженные лучи образуют расходящийся гомоцентрический пучок, т.е. изображение  $A'$  точки  $A$  мнимое и глаз, помещенный на пути этих лучей, увидит светящуюся точку за зеркалом (точка  $A$ ).

Плоское зеркало может дать и действительное изображение, расположенное перед зеркалом, если предметная точка мнимая, т.е. центр падающего пучка находится за зеркалом (рис.3.7, б). Угол  $\omega$  между направлением падающего и отраженного лучей называется углом отклонения. Из рис.75, а следует, что  $\omega = 180^\circ - 2\varepsilon$ . Плоскость зеркала является биссектрисой угла  $\omega$ . Если перед зеркалом поместить предмет, например стрелку  $AB$  (рис.3.8), то для каждой точки предмета получится свое изображение. В результате предмет изобразится зеркалом в натуральную величину; предмет и изображение расположены



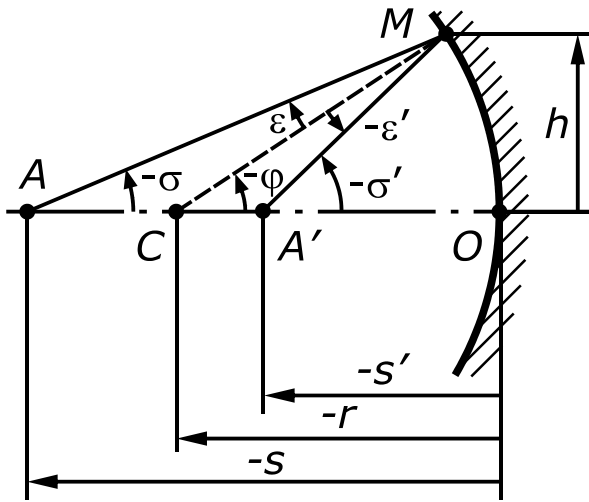
**Рис. 3.10.** Отражение луча в системе двух плоских зеркал

симметрично по разные стороны от зеркала. Глаз, помещенный на пути отраженных лучей, увидит изображение  $A'B'$  стрелки  $AB$  перевернутым в одной плоскости. Такое изображение называют **зеркальным**. Наблюдатель в обычном зеркале видит себя, находящимся за зеркалом; причем правая часть становится левой. Зеркальное изображение может быть вновь обращено в прямое, если последовательно по ходу лучей применить второе плоское зеркало. Итак, плоское зеркало дает мнимое зеркальное изображение, расположенное симметрично предмету.

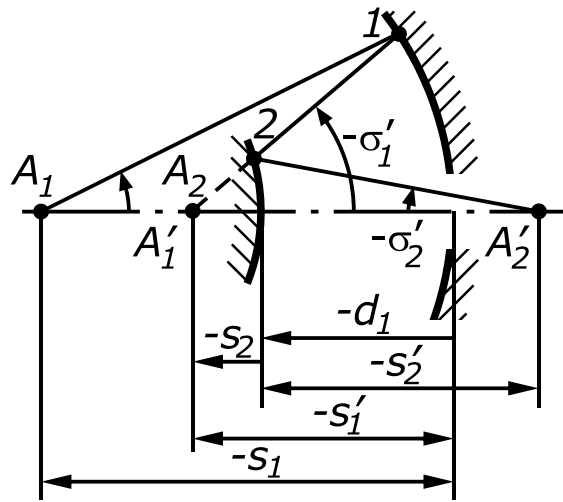
Для изменения направления визирования в оптических приборах часто применяют вращающиеся зеркала. Найдем зависимость между углом поворота зеркала и изменением направления отраженного пучка лучей (рис.3.9). Луч  $A_1$  падающий на зеркало под углом  $\varepsilon$ , отражается в направлении  $OA'_1$ . При повороте зеркала вокруг точки  $O$  в плоскости рисунка из положения 1 положение 2 на угол  $\varphi$  на такой же угол повернется и нормаль  $N_1O$  ( $\angle N_1ON_2 = \varphi$ ). В положении 2 угол падения луча на зеркало равен  $\varepsilon_2$ . Из рисунка видно, что  $\varphi = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ ;  $\angle A'_1OA'_2 = \alpha = 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_1 = 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$  или  $\alpha = 2\varphi$ . Следовательно, при повороте зеркала на некоторый угол  $\varphi$  отраженный луч повернется от своего первоначального положения на удвоенный угол  $2\varphi$ .

Рассмотрим отражение луча в системе из двух плоских зеркал, образующих между собой угол  $\gamma$  (рис.3.10). На рисунке ход луча  $A_1O_1O_2A'_1$  показан стрелками. Углы падения и отражения луча на зер-





**Рис. 3.11.** Отражение луча от вогнутого сферического зеркала



**Рис. 3.12.** Отражение луча от системы сферических поверхностей

кале  $O_1$  обозначим через  $\varepsilon_1$ , соответственно, углы на зеркале  $O_2$  – через  $\varepsilon_2$ . Точка  $N$  – точка пересечения нормалей, следовательно,  $\angle O_2NM = \gamma$ . В треугольнике  $O_1O_2N$  угол  $\gamma$  внешний, поэтому

$$\gamma = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (3.12)$$

Угол  $\omega$  – внешний в треугольнике  $O_1O_2L$ , равный сумме внутренних с ним не смежных углов, т.е.  $\omega = 2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 = 2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ . Используя формулу (3.12), окончательно получаем

$$\omega = 2\gamma \quad (3.13)$$

Итак, при последовательном отражении от двух зеркал луч изменяет свое первоначальное направление на угол  $\omega$  равный удвоенному углу

между зеркалами. Так как в формулу (3.13) не входит угол падения луча на первое зеркало, то при повороте системы двух зеркал угол  $\omega$  остается неизменным. Это свойство пары соединенных в одном блоке зеркал используют при регулировке и настройке оптических приборов; установка таких зеркал в прибор делает его нечувствительным к повороту блока при эксплуатации.

### 3.5. Отражение лучей от сферической поверхности

Отражение лучей от сферической поверхности будем рассматривать как частный случай преломления при условии, что  $n' = -n$ . На рис. 3.11. показана вогнутая сферическая отражающая поверхность с радиусом кривизны  $r$ . Из точки  $A$ , находящейся на расстоянии  $s$  от вершины поверхности, падает луч  $AM$  под конечным углом  $\sigma$  к оптической оси. Найдем положение отраженного луча, т.е. угол  $\sigma'$  и отрезок  $s'$ . Ход луча рассчитывают по методике, изложенной в п.3.1. По формуле (3.1) вычисляют значение  $\sin \varepsilon$  из закона отражения следует, что  $\varepsilon' = -\varepsilon$ . Это равенство может быть получено и из формулы (1.2) при  $n' = -n$ .

На основании (3.3)

$$\sigma' = \sigma + 2\varepsilon' \quad (3.14)$$

По формуле (3.4) находят отрезок  $s'$ . Отрезок  $s'$  и угол  $\sigma'$  определяют положение изображения  $A'$  предметной точки  $A$ .

Значения угла  $\sigma'$  и отрезка  $s'$  являются исходными для расчета хода луча через следующую отражающую или преломляющую поверхность. При этом  $\sigma_2 = \sigma'_1$ , а  $s_2 = s'_1 - d_1$  (рис. 3.12). Для вычисления  $s_2$  расстояние  $d$  берут со знаком минус, так как направление отраженного луча не совпадает с направлением распространения луча, входящего в оптическую систему. Если рассматривать несколько отражающих поверхностей, то расстояние между вершинами  $d_k$  считается положительным, когда следующая поверхность расположена справа от предыдущей, и отрицательным – если слева.

Из формул (3.14) и (3.4) следует, что отрезок  $s'$  изменяется при изменении углов  $\sigma$  и  $\varepsilon$ , т.е. гомоцентричность пучка после отражения на сферической поверхности нарушается.

Если точка  $A$  находится в бесконечности, то  $s_1 = \infty$  и угол  $\sigma_1 = 0$ . Тогда задают высоту  $h_1$  падения луча, параллельного оптической оси, а первую поверхность и определяют  $\sin \varepsilon_1 = -\sin \varphi_1 = -\frac{h_1}{r_1}$  аналогично случаю преломления на сферической поверхности.

## 4. Область параксиальных лучей

### 4.1. Формулы для параксиальных лучей. Параксиальный инвариант Аббе

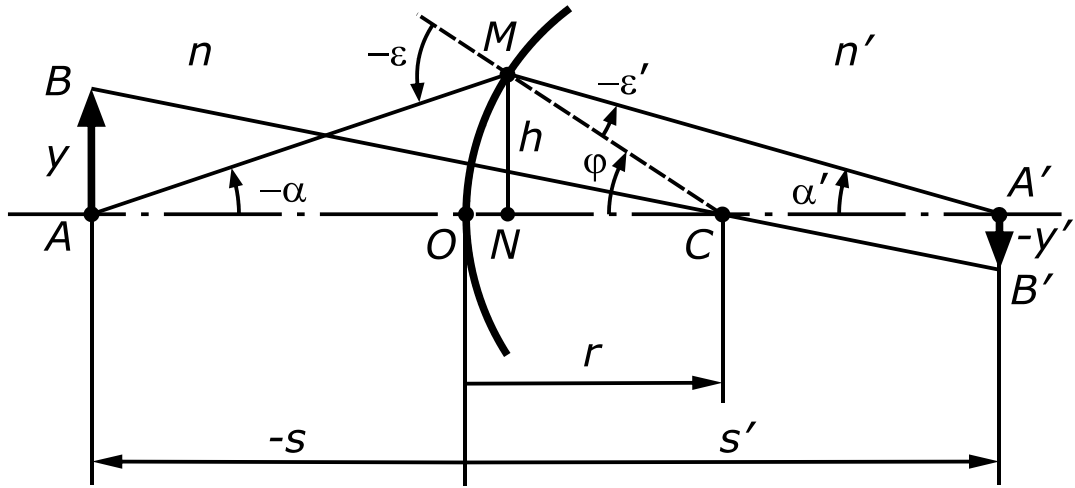
**Параксиальными**, или приосевыми, лучами называют лучи, идущие под малыми углами к оптической оси и образующие на всех преломляющих и отражающих поверхностях весьма малые углы падения, отражения преломления. В этом случае синусы и тангенсы углов, а также значения углов в радианной мере практически совпадают.

Область, для которой справедливо такое приближение, называется параксиальной областью. Например, закон преломления (1.2) при малых углах  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  принимает вид  $n\varepsilon = n'\varepsilon'$ .

Рассмотрим преломление лучей сферической поверхностью, разделяющей две оптические среды с показателями преломления  $n$  и  $n'$  (рис.4.1). Из точки  $A$  на сферическую поверхность падает луч  $AM$  под малым углом к оптической оси. Преломленный луч  $MA'$  пересекает оптическую ось в точке  $A'$  также под малым углом. Углы между параксиальными лучами и оптической осью будем в дальнейшем обозначать через  $\alpha$  и  $\alpha'$  (вместо  $\sigma$  и  $\sigma'$  для действительного луча). Параксиальные лучи – падающий  $AM$  и преломленный  $MA'$  с нормалью  $MC$  образуют также малые углы  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$ . Из точки  $M$  опустим перпендикуляр  $MN$ . Если угол  $\alpha$  мал, то длина перпендикуляра  $h$  и угол  $\varphi$ , будут также малыми.

Закон преломления для параксиального луча имеет вид

$$n\varepsilon = n'\varepsilon' \quad (4.1)$$



**Рис. 4.1.** Преломление луча сферической поверхностью

Угол  $\varepsilon$  – внешний угол треугольника  $AMC$ , поэтому  $-\varepsilon = -\alpha + \varphi$  или  $\varepsilon = \alpha - \varphi$ . Из рассмотрения треугольника  $MCA'$  следует, что  $\varphi = -\varepsilon' + \alpha'$ , откуда  $\varepsilon' = \alpha' - \varphi$ . Подставив значения углов  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  в (4.1) получим

$$n(\alpha - \varphi) = n'(\alpha' - \varphi) \quad (4.2)$$

Из треугольника  $MNC$  находим  $\sin \varphi = \frac{h}{r}$ .

Заменяв  $\sin \varphi$  углом  $\varphi$ , получим

$$\varphi = \frac{h}{r} \quad (4.3)$$

Пренебрегая отрезком  $ON$ , так как он является величиной второго порядка малости, из треугольника  $AMN$  находим

$$\alpha = \frac{h}{s} \quad (4.4)$$

Аналогично из треугольника  $MNA'$  найдем

$$\alpha' = \frac{h}{s'} \quad (4.5)$$

Подставив в выражение (4.2) значения углов  $\varphi$ ,  $\alpha$  и  $\alpha'$  из формул (4.3) – (4.5) после сокращения на  $h$  получим

$$n\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{r}\right) = n'\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{r}\right) = Q_s. \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) носит название **параксиального инварианта Аббе** для сферической преломляющей поверхности. Инвариант  $Q_s$  для двух сопряженных точек, находящихся на оптической оси, величина постоянная, не зависящая от величины углов  $\alpha$  и  $\alpha'$ . Раскрыв скобки в выражении (4.6), запишем его в другой форме:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{r}. \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) называется уравнением параксиального луча для одной преломляющей поверхности. В формулу (4.7) не входит угол  $\alpha$  (или высота  $h$ ) луча с оптической осью. Это значит, что  $s'$  не зависит от  $\alpha$ , т.е. все лучи, выходящие из точки предмета  $A$  под различными, но обязательно малыми углами, после преломления пройдут через одну и ту же точку  $A'$ . Положение распространяется и на центрированную систему, состоящую из нескольких преломляющих поверхностей, так как параксиальный луч остается близким к оптической оси на протяжении всего его хода через оптическую систему. Отсюда можно сделать вывод, что **для реальных систем только в параксиальной области можно применять формулы и положения, справедливые для идеальной оптической системы.**

С изменением положения сопряженных точек  $A$  и  $A'$ , величина инварианта Аббе будет изменяться. Величина инварианта  $Q_s$  изменяется также при переходе от одной поверхности к другой, поэтому он не является полным инвариантом.

Из уравнения (4.7) можно найти фокусные расстояния одной преломляющей поверхности. Если луч падает на поверхность из бесконечности, т.е.  $s = -\infty$ ,  $s' = f'$ , то, подставив эти значения в формулу (4.7) получим

$$f' = \frac{n'r}{n' - n}, \quad (4.8)$$

при подстановке  $s' = \infty$ ,  $s = f$  получим выражение для переднего фокусного расстояния

$$f = -\frac{nr}{n' - n} \quad (4.9)$$

Разделив (4.8) на (4.9) получим зависимость между фокусными расстояниями одной преломляющей поверхности:

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}.$$

Для расчета хода параксиального луча кроме формулы (4.7) применяют также и другую формулу, которая связывает углы  $\alpha$  и  $\alpha'$ . В формулу (4.2) подставим значение  $\varphi$  из (4.3). После преобразований найдем

$$n\alpha' = n\alpha + \frac{h}{r}(n' - n) \quad (4.10)$$

формула (4.10) может быть записана в общем виде для  $m$  преломляющих поверхностей:

$$n_{m+1}\alpha_{m+1} = n_m\alpha_m + \frac{h_m}{r_m}(n_{m+1} - n_m) \quad (4.11)$$

Из рассмотрения рис.4.1. получается формула

$$h_1 - h_2 = d_1\alpha_2$$

или в общем виде

$$h_{m+1} = h_m - d_m\alpha_{m+1} \quad (4.12)$$

По входным координатам  $\alpha_1$  и  $s_1$  выбранного луча определяют  $h_1 = s_1\alpha_1$ ; если заданы  $h_1$  и  $s_1$ , то определяют

$$n_1\alpha_1 = \frac{n_1 h_1}{s_1}.$$

В результате расчетов по формулам (4.11) и (4.12) находят  $h_k$  и  $\alpha'_k$ . Последний отрезок, определяющий положение точки изображения,

$$s'_1 = \frac{h_k}{\alpha'_k}.$$

Для расчета фокусных расстояний системы из  $k$  преломляющих поверхностей используют формулы (4.11) и (4.12), при этом полагают  $\alpha_1 = 0$  ( $s_1 = -\infty$ ).

## 4.2. Инвариант Лагранжа – Гельмгольца для параксиальной области

В предыдущем параграфе было показано, что инвариант Аббе не является полным инвариантом. Существуют полные инварианты, которые сохраняют свое численное значение для всех (любого числа) поверхностей оптической системы.

Предположим, что отрезок  $AB$ , равный  $y$  (см. рис.4.1), после преломления сферической поверхностью  $OM$  изображается отрезком  $A'B'$ , длина которого равна  $y'$ . Из точки  $B$  направим луч на сферическую поверхность по ее радиусу кривизны; так как угол падения такого луча равен нулю, то он пройдет поверхность без преломления.

Из подобия треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  следует

$$\frac{-y'}{y} = \frac{s' - r}{-s + r} \text{ или } \frac{y'}{y} = \frac{r - s'}{r - s}.$$

Из уравнения (4.6) найдем отношение  $\frac{r - s'}{r - s}$ , для чего представим это уравнение в виде

$$\frac{n(r - s)}{sr} = \frac{n'(r - s')}{s'r},$$

тогда  $\frac{r - s'}{r - s} = \frac{ns'}{n's}$ , следовательно,  $\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's}$ , где  $s' = \frac{h}{\alpha'}$  и  $s = \frac{h}{\alpha}$ .

Заменив отношение  $s/s'$  отношением углов  $\alpha/\alpha'$ , в результате получим

$$\frac{y'}{y} = \frac{n\alpha}{n'\alpha'}$$

или

$$yn\alpha = y'n'\alpha' \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) имеет вид инварианта, так как оно показывает, что в параксиальной области произведение показателя преломления  $n$ , величины предмета  $y$  и угла  $\alpha$  луча с осью в пространстве предметов равно произведению соответствующих величин в пространстве

изображений. Полученный инвариант называется **уравнением Лагранжа – Гельмгольца**. Рассмотрим изображение предмета  $y_1$  системой из  $k$  сферических поверхностей (см. рис. 4.2). Из рисунка видно, что изображение  $y'_1$  отрезка  $y_1$  поверхностью 1 является предметом для преломляющей поверхности 2 и т.д. Изображение  $y'_{k-1}$  является предметом для поверхности с номером  $k$ , т.е.  $y'_1 = y_2$ ;  $y'_2 = y_3$ ; ...;  $y'_{k-1} = y_k$ .

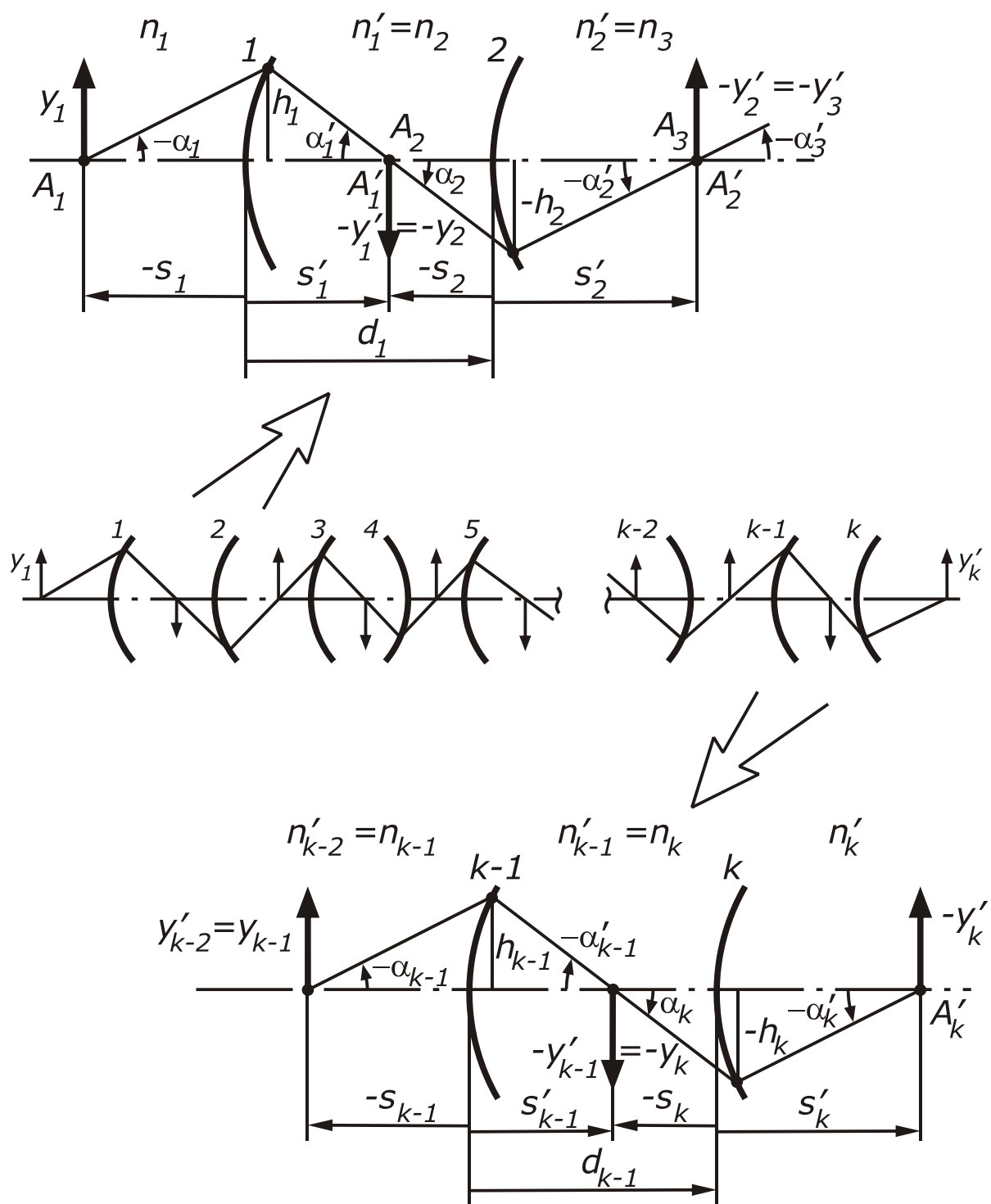
Показатели преломления  $n$  и углы  $\alpha$ , образуемые произвольным параксиальным лучом  $A_1M_1$  с оптической осью имеют также двойные обозначения. Повторив вывод для второй поверхности, найдем выражение, аналогичное (4.13):  $y_2 n_2 \alpha_2 = y'_2 n'_2 \alpha'_2$ ; для поверхности с номером  $k$  получаем:  $y_k n_k \alpha_k = y'_k n'_k \alpha'_k$ . Полный инвариант Лагранжа-Гельмгольца для системы из  $k$  преломляющих поверхностей можно написать в следующем виде:

$$y_1 n_1 \alpha_1 = y_2 n_2 \alpha_2 = y_3 n_3 \alpha_3 = \dots = y_{k-1} n_{k-1} \alpha_{k-1} = y_k n_k \alpha_k = y'_k n'_k \alpha'_k.$$

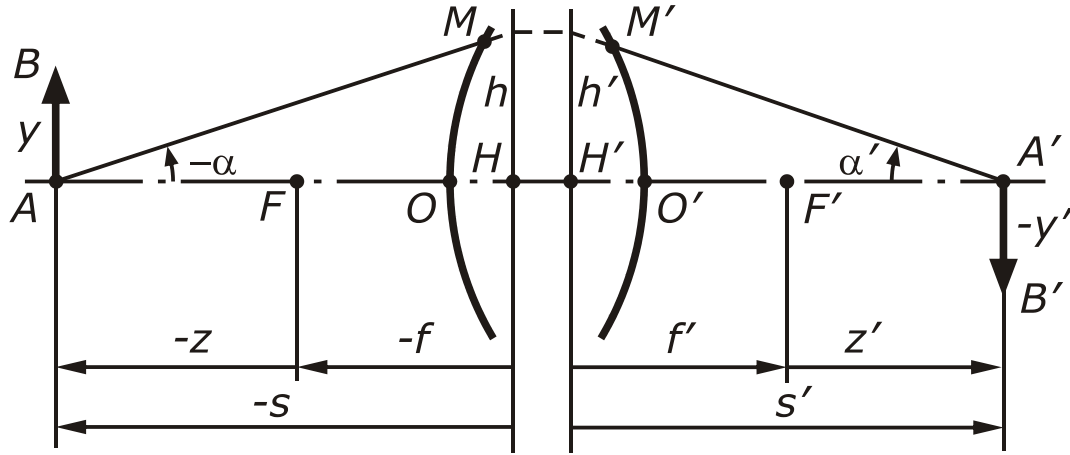
### **4.3. Связь между фокусными расстояниями и показателями преломления**

Представим себе оптическую систему, состоящую из ряда сферических поверхностей, в которой поверхности  $O$  и  $O'$  являются первой и последней поверхностями (рис. 4.3). Из предметной точки  $A$  проведем параксиальный луч  $AM$ , составляющий с оптической осью бесконечно малый угол  $\alpha$ . Сопряженный с ним луч  $A'M'$ , образует с оптической осью также бесконечно малый угол  $\alpha'$ .





**Рис. 4.2.** Ход параксиального луча через систему из  $k$  преломляющих поверхностей



**Рис. 4.3.** Ход параксиального луча через оптическую систему

Из рис. 4.3 получим  $h = s\alpha = s'\alpha'$ , но  $s = z + f$  и  $s' = z' + f'$ , поэтому

$$(z + f)\alpha = (z' + f')\alpha' \quad (4.14)$$

Из соотношений (2.6) найдем  $z$  и  $z'$ . Подставив эти значения в (4.14) получим

$$f\left(\frac{y' - y}{y'}\right)\alpha = f'\left(\frac{y - y'}{y}\right)\alpha'; \quad \frac{f\alpha}{y'} = -\frac{f'\alpha'}{y}$$

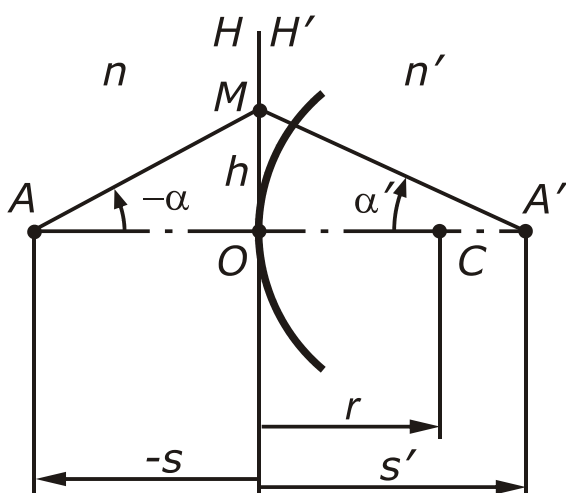
или

$$yf\alpha = -y'f'\alpha'. \quad (4.15)$$

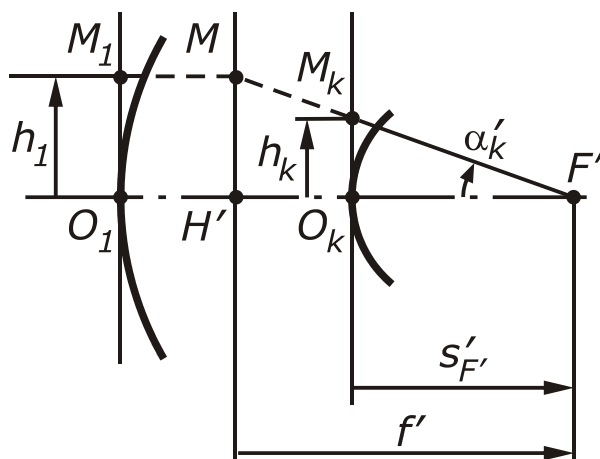
Сопоставляя (4.13) и (4.15), приходим к важному выводу

$$\frac{y\alpha}{y'\alpha'} = \frac{n}{n'} = -\frac{f'}{f} \quad \text{или} \quad \frac{f'}{f} = -\frac{n'}{n}. \quad (4.16)$$

Следовательно, отношение фокусных расстояний любой оптической системы равно отношению показателей преломления крайних сред (первой и последней), взятому с обратным знаком. Если крайние среды одинаковы, что чаще всего бывает на практике, то  $n' = n$  и  $f' = -f$ , т.е. фокусные расстояния равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку.



**Рис. 4.4.** Вспомогательный параксиальный (нулевой луч)



**Рис. 4.5.** Ход нулевого луча, параллельного оптической оси

#### **4.4. Нулевые, или вспомогательные, параксиальные лучи.**

##### **Расчет хода нулевого луча**

Параксиальные лучи, рассмотренные в предыдущих параграфах, очень неудобны для практических вычислений из-за бесконечно малых углов и высот. Введем здесь понятие о вспомогательных, или нулевых лучах.

Рассмотрим одну преломляющую поверхность (рис.4.4). Главные точки этой поверхности совпадают с ее вершиной; точки  $A$  и  $A'$  – соответственно точки предмета и изображения на оптической оси. Отрезки  $s$  и  $s'$  – координаты параксиального луча, определяющие положение предмета и изображения. Выберем произвольную точку  $M$  на главных плоскостях на конечном расстоянии  $h$  от вершины  $O$  поверхности. Точку  $M$  соединим с точками  $A$  и  $A'$ . Полученные таким образом прямые  $AM$  и  $MA'$  называют **нулевыми** (вспомогательными параксиальными) **лучами**.

Нулевой луч – это фиктивный луч, в действительности не существующий в оптических системах, так как он преломляется не на поверхности, а в точке  $M$ , которая находится внутри одной из сред, разделяемых этой поверхностью. Но нулевой луч очень удобен, так как формулы для расчета этого луча значительно проще аналогичных

формул для реального луча. Ход нулевого луча рассчитывают по тем же формулам, что и ход параксиального луча, с той только разницей, что углы  $\alpha$  и  $\alpha'$ , а также высоты  $h$  на главных плоскостях для нулевого луча имеют конечные значения. Для определения заднего фокусного расстояния и положения точки  $F'$  (рис.4.5) угол  $\alpha_1$  между лучом и оптической осью в пространстве предметов принимают равным нулю. Независимо от выбора высоты  $h_1$  луча в пространстве предметов такой луч пересечет ось в пространстве изображений в точке  $F'$  оптической системы. В результате расчета хода нулевого луча по заданному  $h_1$  при  $\alpha_1 = 0$  определяют высоту  $h_k$  на совмещенных главных плоскостях последней поверхности и последний угол  $\alpha'_k$ . Задний фокальный отрезок  $s'_{F'}$  – расстояние от вершины последней поверхности до заднего фокуса – находят из треугольника  $M_k F' O_k$ :

$$s'_{F'} = \frac{h_k}{\alpha'_k}, \quad (4.17)$$

Фокусное расстояние  $f'$  определяют из треугольника  $MH'F'$ :

$$f' = \frac{h_1}{\alpha'_k} \quad (4.18)$$

где  $h_1$  – высота входящего в систему луча, параллельного оси, равная высоте луча на передней главной плоскости  $H$  всей системы. Вследствие того, что линейное увеличение в главных плоскостях равно единице, высота, отсекаемая нулевым лучом на задней главной плоскости  $H'$  всей системы, должна быть также равна  $h_1$ . Для упрощения расчета высоту  $h_1$  принимают равной абсолютной величине радиуса  $r_1$  первой поверхности оптической системы, тогда ход луча через эту поверхность рассчитывают по формуле  $n_2 \alpha_2 = (n_2 - n_1)$ , которая получается из (4.11) после подстановки в нее  $\alpha_1 = 0$  и  $h_1 = r_1$ . Далее по формуле (4.12) вычисляют  $h_2$  и т.д.

При расчете хода нулевого луча в обратном направлении, при котором последний радиус становится первым, получают переднее фокусное расстояние  $f$  и передний фокальный отрезок  $S_F$ .

#### 4.5. Формулы для определения фокусного расстояния и положения кардинальных точек линзы

Как пример использования формул (4.11) и (4.12) для нулевого луча рассчитаем систему из двух преломляющих поверхностей (линзу), причем положим, что первая и последняя среда – воздух, т.е.  $n_1 = n_3 = 1,0$ .

Линзой называется оптическая деталь, ограниченная двумя преломляющими поверхностями тел вращения. В частности, одна из преломляющих поверхностей может быть плоской. В формуле (4.11) положим  $\alpha_1 = 0$ ;  $n_1 = n_3 = 1,0$ . Величины  $n_2$  и  $d_1$  обозначим просто через  $n$  и  $d$ . Тогда

$$\begin{aligned} n\alpha_2 &= \frac{h_1}{r_1}(n-1); \quad \alpha_2 = \frac{h_1(n-1)}{nr_1}; \\ h_2 &= h_1 - d\alpha_2 = h_1 - \frac{h_1(n-1)}{nr_1}d; \\ \alpha'_2 = \alpha_3 &= n\alpha_2 + \frac{h_2}{r_2}(1-n) = n\alpha_2 - \frac{h_2}{r_2}(n-1). \end{aligned}$$

В выражение для  $\alpha_3$  подставим значения  $\alpha_2$  и  $h_2$  и в результате преобразований получим:

$$\alpha_3 = \frac{h_1(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]}{nr_1r_2} \quad (4.19)$$

Согласно (4.18), фокусное расстояние линзы

$$f' = \frac{h_1}{\alpha_3} = \frac{nr_1r_2}{(n-1)[n(r_2 - r_1) + (n-1)d]} \quad (4.20)$$

Так как рассматривается случай, когда линза находится в воздухе, то из (4.16) следует

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n'_3}{n_1} = -1, \text{ т.е. } f' = -f.$$

Задний фокальный отрезок находят по формуле (4.17):

$$s'_{F'} = \frac{h_2}{\alpha_3} = f' \left[ 1 - \frac{(n-1)d}{nr_1} \right]. \quad (4.21)$$

Положение задней главной точки определяется отрезком  $s'_{H'}$ :

$$-s'_{F'} = f' - s'_{F'} \text{ или } s'_{F'} = s'_{F'} - f'. \quad (4.22)$$

После подстановки в (116) значения  $s'_{F'}$  из (4.21) получим

$$s'_{H'} = -f' \frac{(n-1)}{nr_1} d. \quad (4.23)$$

Не приводя здесь вывода, который может быть проделан при расчете хода нулевого луча в обратном направлении, начиная с  $r_2$ , напишем выражения для переднего фокального отрезка  $s_F$  и отрезка  $s_H$ :

$$s_F = -f \left[ 1 + \frac{(n-1)d}{nr_2} \right]; \quad (4.24)$$

$$s_H = -f \frac{(n-1)}{nr_2} d \quad (4.25)$$

#### 4.6. Оптическая сила системы

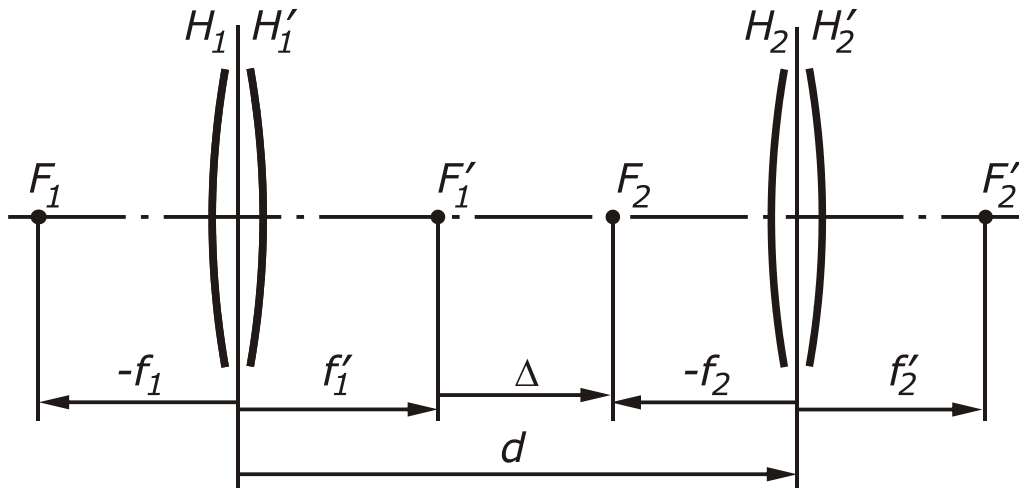
Введем понятие об оптической силе системы. Из уравнений (4.16) следует:

$$-\frac{n}{f} = -\frac{n'}{f'}.$$

Отношение показателя преломления среды к соответствующему фокусному расстоянию называется **оптической силой системы**:

$$\Phi = \frac{n'}{f'}$$

Если оптическая система, например линза, находится в воздухе, т.е. показатели первой и последней сред равны единице, то  $\Phi = 1/f'$ . Следовательно, оптическая сила есть величина, обратная фокусному расстоянию. За единицу оптической силы принимают оптическую силу системы, у которой заднее фокусное расстояние положительное и равно одному метру в воздухе; эта единица называется **диоптрией**. Если оптическая сила выражается в диоптриях, то фокусное расстояние должно быть взято в метрах. Например, если фокусное расстояние системы (линзы) в воздухе равно 100 мм (0,1 м), то ее оптическая сила составляет 10 диоптрий (дптр). Оптическая сила линзы, находящейся в воздухе, может быть найдена, как отношение  $\Phi = \alpha_3/h_1$ .



**Рис. 4.6.** Эквивалентная система из двух тонких линз

С учетом формулы (4.19) получим:

$$\Phi = \frac{(n-1)}{r_1} - \frac{(n-1)}{r_2} + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \frac{(n-1)^2 d}{nr_1 r_2} \quad (4.26)$$

#### 4.7. Бесконечно тонкие линзы

**Бесконечно тонкой линзой** или просто **тонкой линзой** называется такая линза, толщиной которой можно пренебречь по сравнению с радиусами кривизны преломляющих поверхностей. Для такой линзы  $d \approx 0$ , поэтому формулы (4.20) – (4.26) принимают следующий вид:

$$f' = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_1 - r_2)}; \quad \Phi = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right);$$

$$s'_{F'} = f'; \quad s_F = -f';$$

$$s'_{H'} = 0; \quad s_H = 0.$$

Главные плоскости тонких линз совпадают.

**Эквивалентная система из двух тонких линз.** Пусть две тонкие линзы с фокусными расстояниями  $f'_1$  и  $f'_2$  расположены в воздухе на расстоянии  $d$  тогда  $f'_1 = -f_1$  и  $f'_2 = -f_2$  (рис. 4.6).

На рисунке тонкие линзы представлены главными плоскостями, причем для каждой линзы главные плоскости слились в одну. Из ри-

сунка следует, что  $d = f'_1 + \Delta - f_2$ . Заменяя  $-f_2$  на  $f'_2$ , получаем:  $d = f'_1 + \Delta + f'_2$ , откуда  $\Delta = d - f'_1 - f'_2$ .

Эквивалентное фокусное расстояние:

$$f'_{\text{экв}} = -\frac{f'_1 f'_2}{\Delta} = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - d}.$$

Оптическая сила

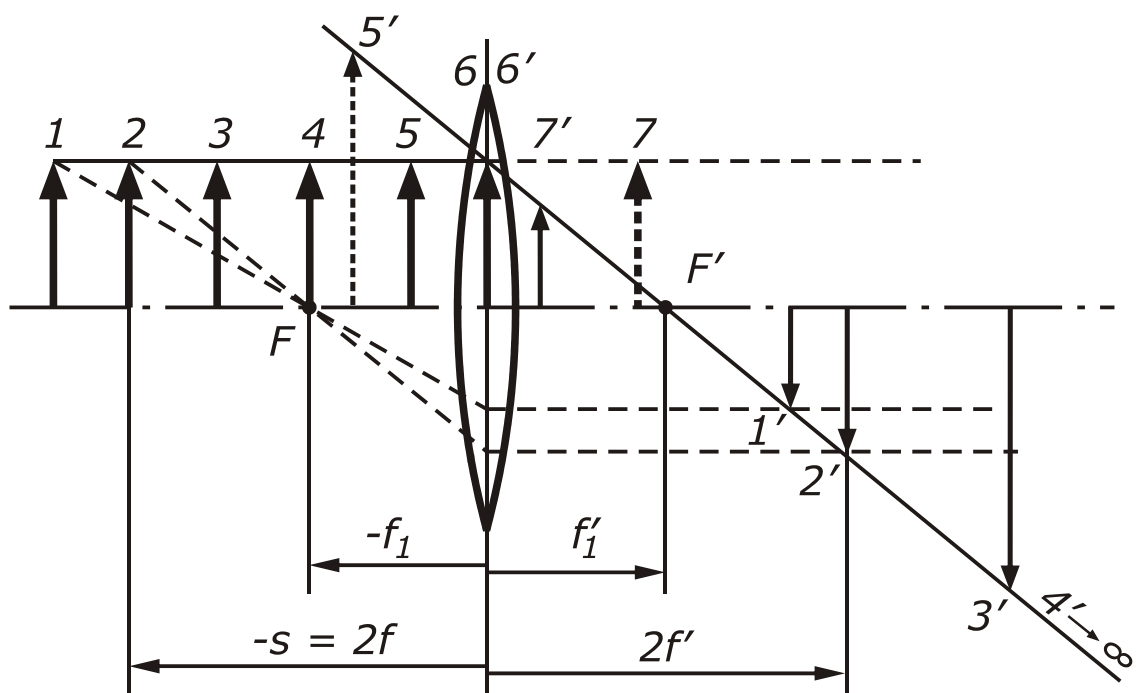
$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 - d\Phi_1\Phi_2 \quad (4.27)$$

Когда линзы соприкасаются, то  $d = 0$ , и формула (4.27) принимает вид:  $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ .

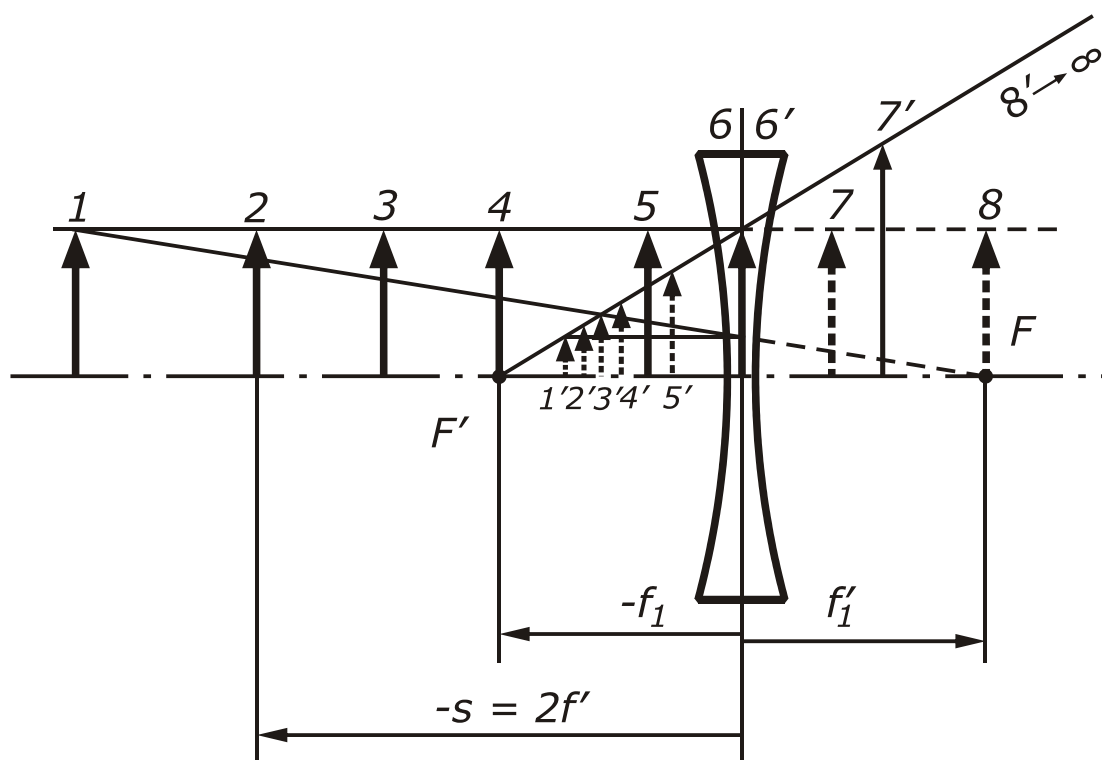
**Графическое построение изображений линзами.** Зная фокусное расстояние и положение кардинальных точек линзы, можно графически построить изображение предмета. На рис. 4.7. показано построение изображений и перемещение их в зависимости от перемещения предмета для положительной и отрицательной бесконечно тонких линз, находящихся в воздухе. Для построения выбирают лучи, ход которых заранее известен. На рис.4.6 показано построение изображения для семи положений предмета, заданных расстоянием  $s$ : **1)**  $s > 2f$ ; **2)**  $s = 2f$ ; **3)**  $s > f$ ; **4)**  $s = f$ ; **5)**  $s < f$ ; **6)**  $s = 0$  (предмет расположен в главной плоскости); **7)** предмет расположен за линзой; **8)** предмет расположен в заднем фокусе отрицательной линзы.

Предметы, расположенные справа от линзы могут быть только мнимыми, так как они образуются мысленным продолжением падающих на линзу лучей. На чертеже эти предметы изображены штриховыми линиями.



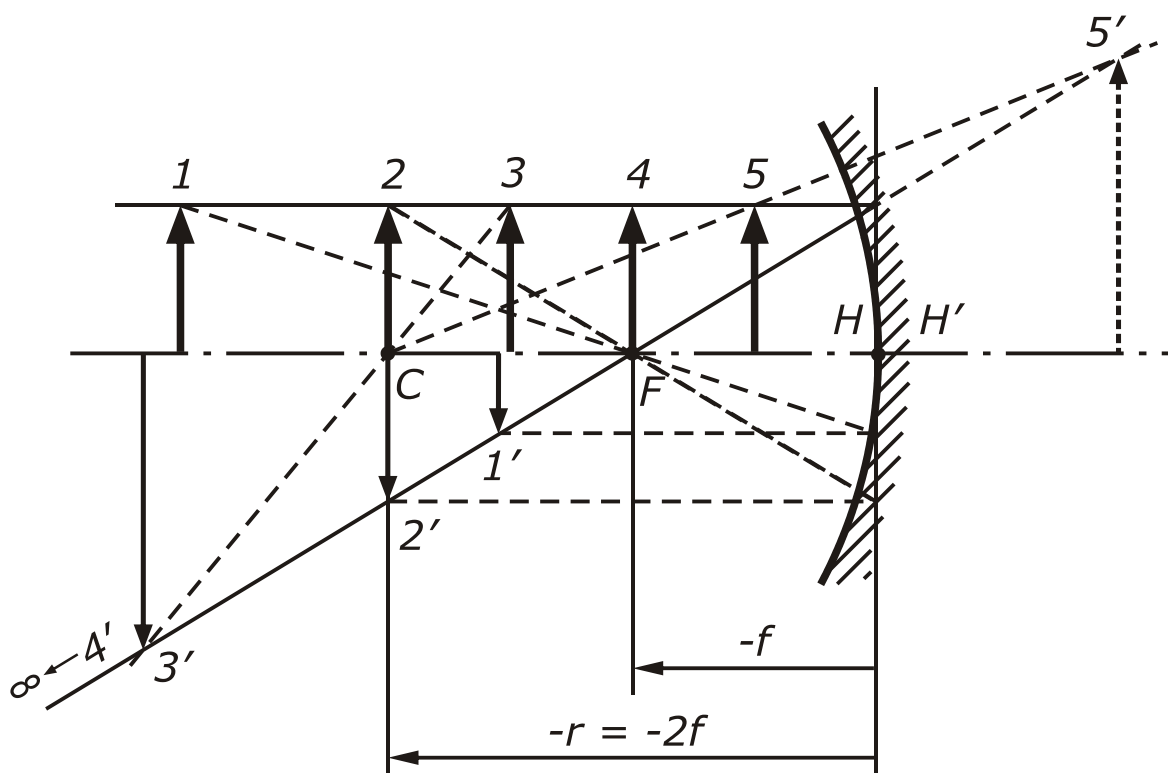


a)



б)

**Рис. 4.7.** Построение изображений тонкими линзами  
а – положительной, б – отрицательной



**Рис. 4.8.** Построение изображений в вогнутом зеркале

#### **4.8. Сферические зеркала. Построение изображений в сферических зеркалах**

Установленные ранее формулы идеальной оптической системы, а также формулы для параксиальных лучей могут быть применимы и для сферических зеркал, если принять  $n' = -n$ . Уравнение параксиального луча (4.7) для сферического зеркала имеет вид:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{2}{r} \quad (4.28)$$

Формула (4.28) связывает расстояние точки предмета на оси от вершины зеркала с расстоянием ее изображения от той же вершины. Формулу фокусного расстояния сферического зеркала получаем из (4.8) и (4.9), полагая в них  $n' = -n$ :

$$f' = f = \frac{r}{2}.$$

Фокусные расстояния равны между собой, точки фокусов совпадают и находятся на середине между центром сферы и ее вершиной. Главные точки  $H$  и  $H'$  совпадают с вершиной зеркала, а главные плоскости – с плоскостью, касательной к зеркалу в его вершине. Поскольку  $r = 2f'$ , то уравнение (4.28) может быть записано в другом виде:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}.$$

Для сферического зеркала инвариант Лагранжа – Гельмгольца (4.13) имеет вид:

$$y\alpha = -y'\alpha',$$

Для построения изображения в сферическом зеркале используют лучи, ход которых заранее известен: луч, идущий в пространстве предметов параллельно оптической оси; луч, проходящий через передний фокус, и луч, направленный по радиусу кривизны.

Первый луч, отразившись от зеркала, пройдет через его фокус; второй – выйдет параллельно оптической оси и третий – отразится в том же направлении. На рис. 4.8 показано построение изображений в вогнутом (положительном) зеркале для нескольких положений предмета:

- 1) за центром кривизны;
- 2) в центре кривизны;
- 3) между центром кривизны  $C$  и фокусом;
- 4) в фокусе  $F$ ;
- 5) перед фокусом

Как видно из рис. 4.8, при положении предмета за фокусом зеркала изображения получаются действительные; при положении предмета перед фокусом – изображение мнимое (например, изображение 5').

## Литература

1. Ландсберг Г.С. Оптика. Издание 6-е. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
2. Г. Шрёдер, Х. Трайбер, Техническая оптика. – М.: Техносфера, 2006. – 424 с.
3. Н.П. Гвоздева, К.И. Коркина, Прикладная оптика и оптические измерения. М., Машиностроение, 1976 г. – 383 с.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике: Т.3: Излучение. Волны. Кванты. Вып.3. – М.: Мир. – 1965. – 240 с.
5. Вычислительная оптика: Справочник/ М.М. Русинов, П.А. Граматин, П.Д. Иванов и др. Под общ. ред. М.М.Русинова. – Л.: Машиностроение. 1984. – 423 с.
6. Теория оптических систем: Учебник для студентов приборостроительных специальностей вузов./Н.П. Заказнов, С.И. Кирюшин, В.Н.Кузичев. 3-е изд., перераб. и доп.-М.: Машиностроение, 1992. - 448 с.: ил.
7. Теория оптических приборов./ Чуриловский В.Н. М.;Л.: Машиностроение, 1966. - 559 с.
8. Теория оптических систем/ Н.Бегунов и др. М.: Машиностроение. 1981. 432 с.

### ***Дополнительная литература к введению***

1. Кудрявцев П.С. История физики Т.1. – М.: Учпедгиз.–1956.– 570с.
2. Гуриков В.А. Становление прикладной оптики. XV-XIX вв. 1983. 192 с.
3. Смит Г. Драгоценные камни: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – 558 с., ил.
4. Dimitris Plantzos, Crystals and Lenses in the Graeco-Roman: American Journal of Archaeology, Vol. 101, No. 3, (Jul., 1997), pp. 451-464
5. George Sines and Yannis A. Sakellarakis Lenses in Antiquity American Journal of Archaeology, Vol. 91, No. 2, (Apr., 1987), pp. 191-196
6. JAY M. ENOCH First known lenses originating in Egypt about 4600 years ago Documenta Ophthalmologica 99: 303–314, 1999.

# Оглавление

<b>Предисловие .....</b>	<b>3</b>
<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>1. Основы геометрической оптики .....</b>	<b>11</b>
1.1. Законы геометрической оптики .....	11
1.2. Принцип Ферма.....	21
1.3. Оптическое изображение и основные понятия геометрической оптики.....	28
1.4. Правила знаков.....	32
<b>2. Теория идеальной оптической системы.....</b>	<b>37</b>
2.1. Оптическая система .....	37
2.2. Идеальная оптическая система .....	39
2.3. Линейное увеличение. Кардинальные точки оптической системы. Главные плоскости. Фокусные расстояния .....	41
2.4. Графическое построение изображений .....	45
2.5. Основные формулы идеальной оптической системы.....	47
Уравнение Лагранжа – Гельмгольца.....	49
2.6. Угловое и продольное увеличение оптической системы. Их связь с линейным увеличением. Узловые точки.....	50
2.7. Соединение двух оптических систем в одну с общей осью симметрии .....	54
<b>3. Преломление и отражение лучей.....</b>	<b>59</b>
3.1. Преломление лучей сферической поверхностью .....	59
3.2. Преломление лучей плоской поверхностью и плоскопараллельной пластинкой .....	60
3.3. Преломление лучей призмой. Оптический клин. ....	64
3.4. Отражение лучей плоским зеркалом и системой из плоских зеркал.....	66
3.5. Отражение лучей от сферической поверхности .....	69
<b>4. Область параксиальных лучей .....</b>	<b>70</b>
4.1. Формулы для параксиальных лучей. Параксиальный инвариант Аббе .....	70
4.3. Связь между фокусными расстояниями и показателями преломления .....	75
4.4. Нулевые, или вспомогательные, параксиальные лучи. Расчет хода нулевого луча .....	78
4.5. Формулы для определения фокусного расстояния и положения кардинальных точек линзы .....	80
4.6. Оптическая сила системы.....	81
4.7. Бесконечно тонкие линзы .....	82
4.8. Сферические зеркала. Построение изображений в сферических зеркалах .....	85
<b>Литература .....</b>	<b>87</b>

Учебное пособие

*И. В. Федосов*

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Монография

Подписано в печать 19.02.2009 г.

Формат 60x84 1/16

Гарнитура Ариал . Бумага офсетная.

Тираж 100 экз. Заказ 593.

Отпечатано в типографии ООО «Сателлит»  
г. Саратов, ул. Ак. Антонова, 14а, тел. 62-97-88